NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen: Jon Andreas Støvneng, telefon: 45 45 55 33 / 73 59 36 63

EKSAMEN I TFY4145 OG FY1001 MEKANISK FYSIKK

Fredag 18. desember 2009 kl. 0900 - 1300

Bokmål

Tillatte hjelpemidler (kode C):

- Bestemt enkel godkjent kalkulator.
- Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
- C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Vedlagt formelark (side 7).

Sensurdato: Innen 18. januar 2010.

Prosenttallene i parentes gitt ved hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen. I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.
Noen generelle merknader:
- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. m for masse), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. m for meter)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**

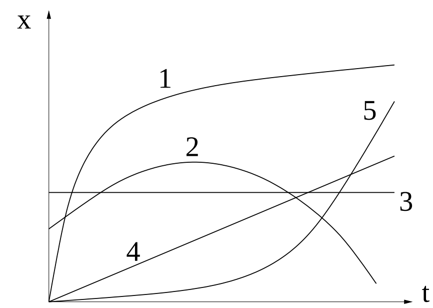
Svar på flervalgsspørsmål i Oppgave 1 skriver du på første innleveringsark i en tabell lignende dette:

Spørsmål:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Mitt svar:												

Oppgave 1. Tolv flervalgsspørsmål (teller 30 %)

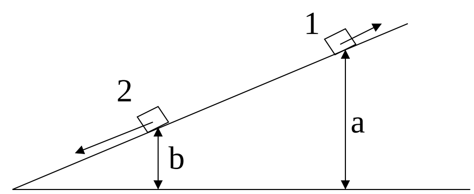
a. Ei kule skytes (ved tid $t = 0$) ut med en vinkel på 25 grader i forhold til horisontalplanet. Anta at luftmotstand kan neglisjeres. Hvilken graf i figuren illustrerer da best kulas horisontale posisjon som funksjon av tida?

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5



b. En kloss glir uten friksjon på et skråplan. Klossen starter i posisjon 1 og har da hastighet v_1 oppover skråplanet. Hva blir klossens hastighet v_2 når den senere passerer posisjon 2 på vei nedover?

A $\left[v_1^2 + 2g\,(a-b)\right]^{1/2}$
B $\left[v_1^2 - 2g\,(a-b)\right]^{1/2}$
C $\left[v_1^2 + g\,(a-b)\right]^{1/2}$
D $\left[v_1^2 - g\,(a-b)\right]^{1/2}$
E $\left[2g\,(a-b)\right]^{1/2}$

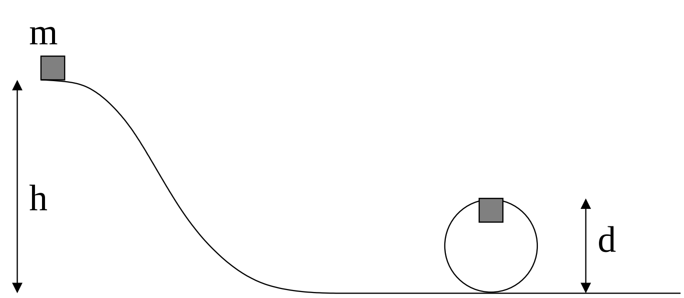


c. Du har planer om å ommøblere og forsøker å skyve ditt gamle, tunge piano bortover det teppebelagte gulvet. Den statiske og den kinematiske friksjonskoeffisienten er imidlertid så store som henholdsvis 0.8 og 0.6, så til tross for at du dytter (horisontalt) med en kraft på hele 700 N, er pianoet ikke til å rikke. Hva var friksjonskraften fra teppet på pianoet under kraftanstrengelsen?

A Vi har ikke nok opplysninger til å bestemme friksjonskraften.
B 600 N
C 700 N
D 800 N
E 900 N

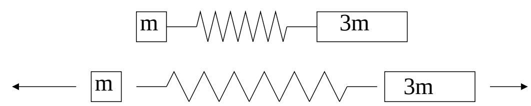
d. I en berg-og-dalbane har vogna med masse m (inklusive personene oppi) tilnærmet null hastighet når den fra høyden h stuper utfor siste bakke før *loopen*, som har diameter d. Hvor stor blir kraften fra skinnene på vogna når vogna er på toppen av loopen? (Friksjon og luftmotstand kan neglisjeres.)

A $mg\,(2d-h)\,/d$
B $2mg\,(h-3d)\,/d$
C $2mg\,(h-d)\,/d$
D $mg\,(3h-4d)\,/d$
E $mg\,(4h-5d)\,/d$



e. To masser, m og $3m$, ligger på et friksjonsfritt bord på hver sin side av en spent fjær. Når fjærlåsen åpnes, skyves de to massene i hver sin retning. Hvordan fordeles den potensielle energien i den spente fjæra på kinetisk energi til de to massene?

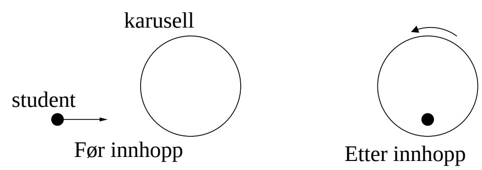
A 25 % på m, 75 % på $3m$
B 75 % på m, 25 % på $3m$
C 10 % på m, 90 % på $3m$
D 90 % på m, 10 % på $3m$
E 50 % på m, 50 % på $3m$



f. En student tar fart og hopper på en karusell som dermed begynner å rotere (tilnærmet friksjonsfritt) omkring en aksling som står fast i bakken, og som passerer gjennom karusellens sentrum. For systemet karusell + student, hvilke(n) størrelse(r) *endrer seg ikke* fra før til etter studentens innhopp på karusellen? (Her er E, L og p henholdsvis systemets energi, spinn og bevegelsesmengde.)

[**Presisering** gitt ved eksamensstart: L er systemets spinn mhp en akse gjennom karusellens sentrum.]

A Bare L.
B L og E.
C L og p.
D L, E og p.
E Bare p.



g. Treghetsmomentet til ei DVD-plate, mhp en akse normalt på plata gjennom platas sentrum, er, målt i SI-systemet, av størrelsesorden

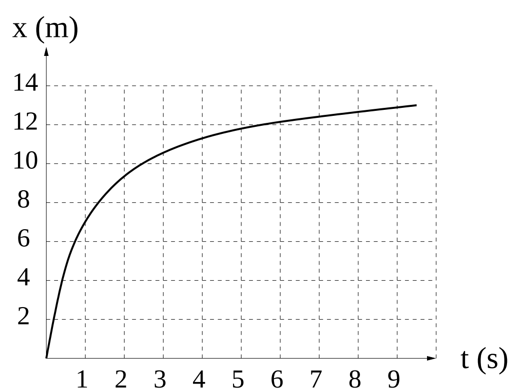
A $3 \cdot 10^{-9}$ B $3 \cdot 10^{-5}$ C 0.3 D $3 \cdot 10^{3}$ E $3 \cdot 10^{7}$

h. Treghetsmomentet til en fotball, mhp en akse gjennom fotballens sentrum, er, målt i SI-systemet, av størrelsesorden

A $3 \cdot 10^{-11}$ B $3 \cdot 10^{-7}$ C $3 \cdot 10^{-3}$ D 30 E $3 \cdot 10^{5}$

i. Grafen viser posisjon x (m) som funksjon av tid t (s) for en person som løper og går langs en rett vei. Personens hastighet ved $t = 1$ s er da ca

A 1 km/h.
B 4 km/h.
C 7 km/h.
D 11 km/h.
E 16 km/h.



j. Uranus har 4 ganger så stor diameter og 14.5 ganger så stor masse som jorda. Hva er da tyngdens akselerasjon på overflaten av Uranus? (g er tyngdens akselerasjon på jordas overflate.)

A $0.3g$ B $0.9g$ C $1.5g$ D $2.1g$ E $3.6g$

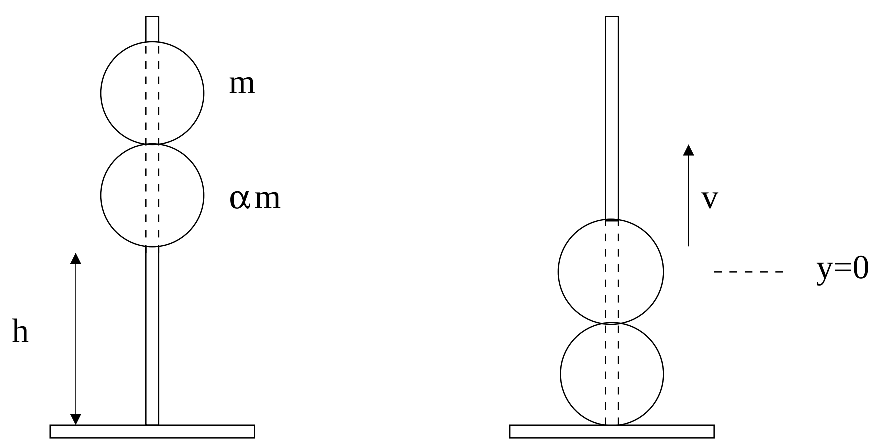
k. En pakke vaskemiddel står oppå en vaskemaskin som er i ferd med å sentrifugere på 1200 omdreininger pr minutt. Vaskemaskinen vibrerer dermed vertikalt med en amplitude på 1 mm. Vil vaskemiddelpakken på noe tidspunkt miste kontakten med underlaget? Hvorfor, evt hvorfor ikke?

A Ja, fordi vaskemaskinens maksimale akselerasjon overstiger 9.8 m/s^2.
B Ja, fordi vaskemaskinens maksimale hastighet overstiger 9.8 m/s.
C Nei, fordi vaskemaskinens maksimale akselerasjon aldri overstiger 9.8 m/s^2.
D Nei, fordi vaskemaskinens maksimale hastighet aldri overstiger 9.8 m/s.
E Nei, fordi vaskemaskinens maksimale vertikale utsving aldri overstiger 9.8 mm.

l. En masse er festet til ei fjær og utfører udempede harmoniske svingninger. Massens maksimale utsving fra likevekt er 5 cm og dens maksimale akselerasjon er 45 cm/s^2. Hva er da massens maksimale hastighet?

A 15 cm/s B 25 cm/s C 35 cm/s D 45 cm/s E 55 cm/s

Oppgave 2. Sprettballer (teller 20 %)

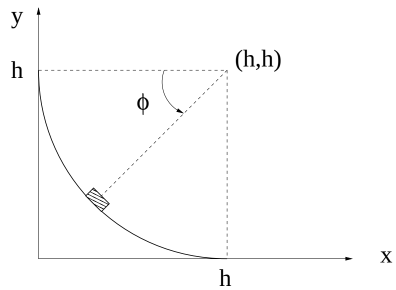


To baller, begge gjennomboret gjennom sentrum, kan gli friksjonsfritt nedover en stang. Den nederste ballen har masse αm og den øverste har masse m. Ballene slippes, med null starthastighet, fra en høyde h over bakken, som vist i figuren. Alle kollisjoner er i denne oppgaven fullstendig *elastiske*.

a. Bestem den nederste ballens hastighet v_0 rett *før* støtet mot bakken. Hva er dens hastighet rett *etter* støtet mot bakken? Forklar kort det tilsynelatende bruddet på kravet om bevaring av bevegelsesmengde i dette støtet.

b. Umiddelbart etter at nederste ball har fullført støtet mot bakken kolliderer de to ballene med hverandre. Bestem den øverste ballens hastighet v rett etter kollisjonen. Finn også ut hvor høyt, y, den vil sprette. Uttrykk v og y ved h og α (eventuelt v_0 og α hvis du ikke har bestemt v_0 i forrige punkt). Kommenter kort uttrykket for y for grensetilfellene $\alpha \gg 1$ og $\alpha \ll 1$, samt spesialtilfellet $\alpha = 1$.

Oppgave 3. Et usannsynlig bratt ovarenn uten friksjon (teller 25 %)



Ovarennet i en hoppbakke har form som en kvartsirkel med radius h. Vi velger koordinatsystem slik at bommen (dvs startposisjonen) befinner seg i $(x, y) = (0, h)$ og hoppkanten i $(h, 0)$. Med (h, h) som referansepunkt er det klart at hopperens posisjon er entydig bestemt av vinkelen ϕ, se figuren. Siden ovarennet er både bratt og uten friksjon, velger hopperen å slippe seg ut fra bommen med null starthastighet.

[**Presisering** gitt ved eksamensstart: Hopperens masse er m.]

a. Vis at hopperens hastighet nedover ovarennet blir $v(\phi) = b \cdot \sqrt{\sin \phi}$ og fastlegg derved konstanten b. (Merk: Konstanten b er ikke dimensjonsløs.) Hva blir hopperens hastighet v_0 ut fra hoppkanten?

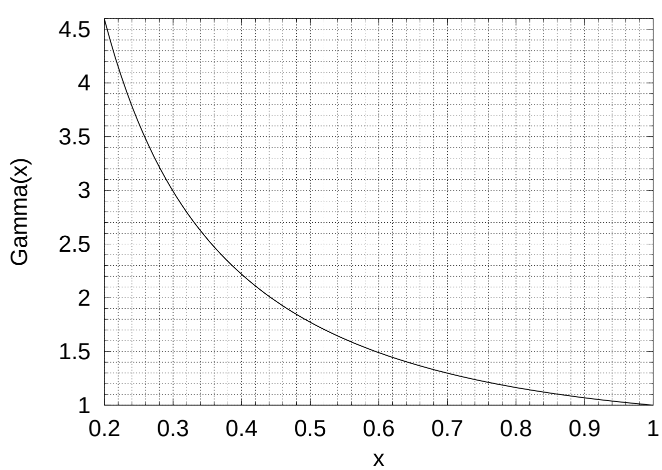
b. Hvor i ovarennet er vertikalkomponenten av hopperens hastighet størst? Hva blir normalkraften $N(\phi)$ fra underlaget på hopperen?

c. Hvor lang tid T bruker hopperen fra bommen til hoppkanten? Bruk opplysningene som gis nedenfor. Skriv T på formen $\beta \cdot \sqrt{h/g}$, bestem (den dimensjonsløse) faktoren β med 2 gjeldende siffer, og vurder om svaret du finner virker rimelig i forhold til tida hopperen ville ha brukt om han snublet *utenfor* ovarennet og falt *fritt* fra høyden h.

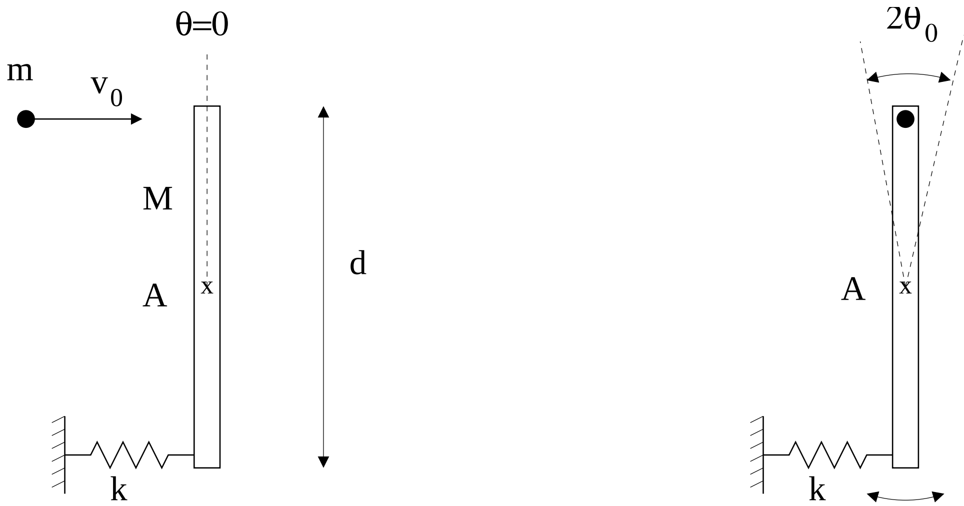
Oppgitt:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

Funksjonen $\Gamma(x)$ for x mellom 0.2 og 1.0:



Oppgave 4. Treghetsmoment og harmonisk oscillator (teller 25 %)



En tynn og jevntykk stang har lengde d og masse M. Stanga kan rotere friksjonsfritt omkring en akse (A) på midten. Den nederste enden er festet til ei fjær med fjærkonstant k (se figuren over). Stanga er i utgangspunktet i likevekt ($\theta = 0$). Et prosjektil med masse m og hastighet v_0 treffer øverst på stanga, slik at denne begynner å svinge harmonisk omkring sin likevektsposisjon. Kollisjonen mellom prosjektil og stang er fullstendig uelastisk. Prosjektilets masse er neglisjerbar i forhold til stangas masse, dvs $m \ll M$. Videre er fjæra tilstrekkelig stiv til at amplituden θ_0 for den harmoniske svingningen blir liten, dvs $\theta_0 \ll 1$.

a. Hva er systemets energi E_0, bevegelsesmengde p_0 og spinn L_0 (omkring aksen A) *før* prosjektilet kolliderer med stanga? Bestem stangas treghetsmoment I (omkring aksen A).

b. Bestem systemets energi E_1 *umiddelbart etter* at prosjektilet har kollidert med stanga. Anta at kollisjonen er *fullført* før fjæra i nevneverdig grad presses sammen. Hvor stor andel av energien har "gått tapt" (dvs gått over i andre former enn mekanisk energi) dersom stangas masse M er 300 ganger større enn prosjektilets masse m?

c. Vis at stangas harmoniske svingebevegelse, for små utsving fra likevekt, beskrives av differensialligningen

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

for vinkelen θ, og bestem derved et uttrykk for svingebevegelsens periode $T = 2\pi/\omega_0$. Finn tallverdi for T (i sekunder) når $M = 3.0$ kg og $k = 10^3$ N/m.

Oppgitt: $\sin x \simeq x$ og $\cos x \simeq 1$ når $x \ll 1$.

FORMELARK.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbols betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene. I tillegg finnes en mengde definisjoner og formler i Angell & Lian: Fysiske størrelser og enheter.

$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ Resten av konstantene hentes fra Angell & Lian: Fysiske størrelser og enheter.

$\vec{F}(\vec{r},t) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$, der $\vec{p}(\vec{r},t) = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ $\quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ $\quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant $\vec{\alpha}$: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\cdot(\theta - \theta_0)$

Arbeid $\mathrm{dW} = \vec{\mathrm{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{s}}$ $\quad$ Kinetisk energi $\mathrm{E_k} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2$

$E_\mathrm{p}(\vec{r})$ = potensiell energi (f.eks. tyngde: mgh, fjær: $\frac{1}{2}kx^2$) $\quad$ Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_\mathrm{p}(\vec{r})$

$|F_\mathrm{f}| \le \mu_\mathrm{s}\cdot F_\perp$ $\quad |F_\mathrm{f}| = \mu_\mathrm{k}\cdot F_\perp$ $\quad$ Luftmotstand o.l.: $\vec{F}_\mathrm{f} = -k_\mathrm{f}\vec{v}$

Massefellespunkt: $\vec{r}_\mathrm{cm} = \frac{1}{M}\sum_i \vec{r}_i m_i \to \frac{1}{M}\int \vec{r}\cdot\mathrm{dm}$

$v = r\omega$ $\quad$ Sentripetalaksel. $a_\mathrm{c} = -v\omega = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 r$ $\quad$ Baneaksel. $a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = r\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}}$

Kraftmoment $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$ $\quad$ Statisk likevekt: $\Sigma\vec{F}_i = \vec{0}$ $\quad \Sigma\vec{\tau}_i = \vec{0}$

Spinn (dreieimpuls) $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ $\quad \vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{L}$ $\quad$ Stive legemer: $\vec{L} = I\cdot\vec{\omega}$ $\quad \vec{\tau} = I\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{dt}}$

Kinetisk energi $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}I\,\omega^2$ $\quad$ der treghetsmoment $I = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2\mathrm{dm}$

Massiv kule: $I_\mathrm{cm} = \frac{2}{5}MR^2$ $\quad$ Ring: $I_\mathrm{cm} = MR^2$ $\quad$ Sylinder/skive: $I_\mathrm{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ $\quad$ Kuleskall: $I_\mathrm{cm} = \frac{2}{3}MR^2$

Lang, tynn stav: $I_\mathrm{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$ $\quad$ Parallellakseteoremet: $I = I_\mathrm{cm} + Md^2$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$ $\quad E_\mathrm{p}(r) = -G\frac{M}{r}m$

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\quad f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ $\quad$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Tyngdependel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$, der $\sin\theta \approx \theta$ $\quad$ Fysisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ $\quad$ Matematisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Rakettligningen: $\vec{F}_\mathrm{Y} + \vec{v}_\mathrm{rel}\cdot\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}$