NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen: Jon Andreas Støvneng, telefon: 45 45 55 33

EKSAMEN I FY1001 og TFY4145 MEKANISK FYSIKK

Fredag 16. desember 2011 kl. 0900 - 1300

Bokmål

Tillatte hjelpemidler (kode C):

- Bestemt enkel godkjent kalkulator.
- Rottmann: Matematisk formelsamling.
- C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Vedlagt formelark (side 7).

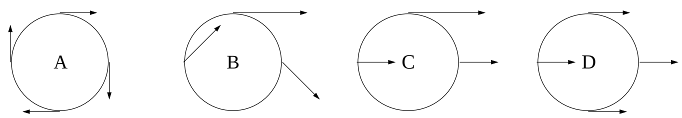
Sensurdato: Senest 16. januar 2012.

Prosenttallene i parentes gitt ved hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen. I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.
Noen generelle merknader:
- Symboler i kursiv (f.eks. m for masse), enheter uten kursiv (f.eks. m for meter)
- Vektorer med fete bokstaver (f.eks. $\boldsymbol{p}$)
- $\hat{x}$ er enhetsvektor i x-retning etc.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C eller D. Rett svar gir 2.5 p, galt svar (eller flere svar) gir 0 p.

Oppgave 1. Ti flervalgsspørsmål (teller $2.5 \times 10 = 25$ %)

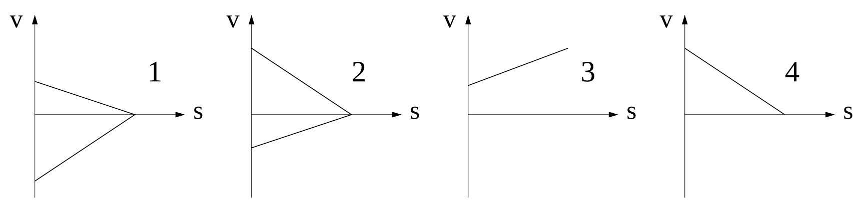
a.



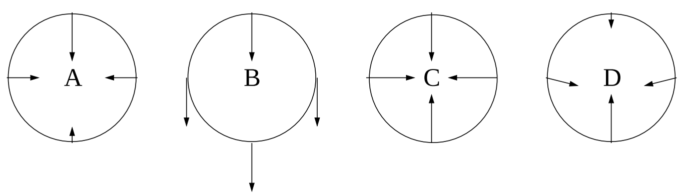
Et hjul triller mot høyre uten å gli. Hvilken figur viser riktige hastighetsvektorer på de fire stedene på hjulet (nederst, øverst, venstre og høyre)?

b. En kloss sendes oppover et skråplan. Det er friksjon mellom klossen og underlaget. Hvilken eller hvilke av figurene viser mulig graf for klossens hastighet v? (s angir klossens posisjon på skråplanet, og v og s er begge positive i retning oppover skråplanet.)

A Kun graf 1.
B Kun graf 2.
C Graf 2 og 4.
D Graf 1 og 3.



c.



Ei vogn har stor nok hastighet til å fullføre en vertikaltstilt sirkelformet "loop". Hvilken figur viser riktige akselerasjonsvektorer på de fire stedene på loopen (nederst, øverst, venstre og høyre)? (Se bort fra friksjon.)

d. Hvis vogna i oppgave **c** (masse m) har hastighet $\sqrt{3gr}$ på toppen av loopen (radius r), hvor stor er da normalkraften fra loopen på vogna når vogna passerer nederst på loopen?

A $4mg$ B $6mg$ C $8mg$ D $10mg$

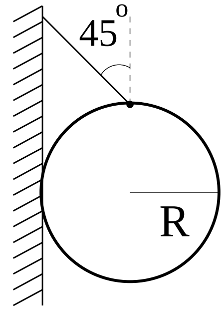
e. En satellitt har potensiell energi $U = U(r)$. Vi velger $U(\infty) = 0$. Hva blir da satellittens kinetiske energi K og totale energi E når den går i sirkelbane med radius r rundt jorda?

A $K = -E = -U/2$ B $K = E/2 = U$ C $K = -E/2 = U/2$ D $K = E = U$

f. Jordas radius er ca $6.4 \cdot 10^3$ km. Avstanden mellom (sentrum av) sola og jorda er ca $150 \cdot 10^6$ km. Hva blir da et rimelig anslag for forholdet mellom banedreieimpulsen L_b til jorda relativt sola og jordas spinn L_s? (Tips: Anta sirkulær bane, og se oppgave 3**d** og vedlagte formler.)

A $L_b/L_s \simeq 5 \cdot 10^6$ B $L_b/L_s \simeq 5 \cdot 10^3$ C $L_b/L_s \simeq 5$ D $L_b/L_s \simeq 5 \cdot 10^{-3}$

g. En ball med radius R og tyngde G henger i ei masseløs snor mot en vertikal vegg som vist i figuren til høyre. Det er stor nok friksjon mellom vegg og ball til at ballen kan henge med snorfestet på toppen, slik at snora danner en vinkel på 45 grader med vertikalen. Hva er snordraget S?



A $S = \sqrt{2}G$ B $S = G/\sqrt{2}$ C $S = 2G$
D $S = G/2$

h.

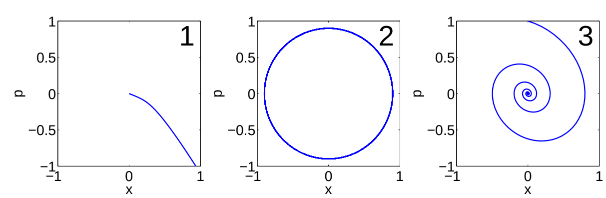
```
[t,x,y]=textread('legeme.txt','%f %f %f');
N=length(t);
A=zeros(1,N);
B=zeros(1,N);
for i=2:N-1
    A(i)=(x(i+1)-x(i-1))/(t(i+1)-t(i-1));
    B(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(t(i+1)-t(i-1));
    C(i)=A(i)*A(i)+B(i)*B(i);
    D(i)=sqrt(x(i)*x(i)+y(i)*y(i));
    E(i)=C(i)/D(i);
end
```

Matlabkoden til venstre leser, fra fila legeme.txt, sammenhørende verdier for tid (t) og kartesiske koordinater (x, y) for et legeme som følger en sirkulær bane. Hvilken fysisk størrelse representerer E i programmet?

A Kinetisk energi pr masseenhet.
B Lineær impuls pr masseenhet.
C Sentripetalakselerasjonen.
D Dreieimpuls pr masseenhet.

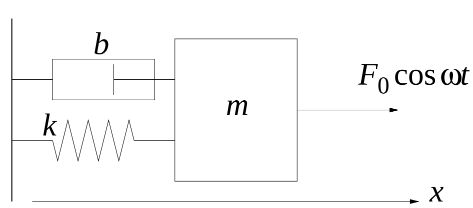
i. Figuren til høyre viser såkalte faseplott, dvs utsving x og impuls $p = m\dot{x}$, for fri svingninger for en endimensjonal harmonisk oscillator. Hvilke grafer tilsvarer hhv udempet, svakt ("underkritisk") dempet og sterkt ("overkritisk") dempet oscillator?

A 1: udempet; 2: svakt dempet; 3: sterkt dempet
B 1: svakt dempet; 2: sterkt dempet; 3: udempet
C 1: sterkt dempet; 2: svakt dempet; 3: udempet
D 1: sterkt dempet; 2: udempet; 3: svakt dempet

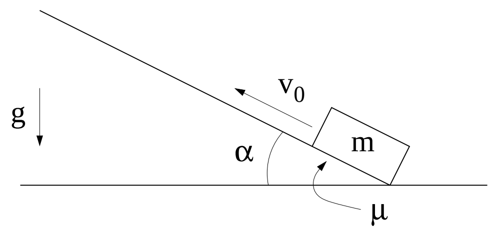


j. En masse m er festet til ei fjær med fjærkonstant k og påvirkes av en ytre harmonisk kraft $F_0 \cos \omega t$ slik at den tvinges til å svinge med samme frekvens, dvs med utsving $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \phi)$. Svingebevegelsen påvirkes av en friksjonskraft $-b\dot{x}$, med dempingskonstant b. Hvor stor er utsvingsamplituden A på resonans, dvs for $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, i forhold til for riktig lave frekvenser, dvs $\omega \to 0$?

A $A(\omega_0)/A(0) = \sqrt{k}/mb$
B $A(\omega_0)/A(0) = k/b$
C $A(\omega_0)/A(0) = m/kb$
D $A(\omega_0)/A(0) = \sqrt{km}/b$



Oppgave 2. **Skråplan med friksjon (teller 20 %: 5+5+5+5)**



En kasse sendes i vei med starthastighet v_0 oppover et skråplan. Kassen har masse m, skråplanet danner en vinkel α med horisontalen, og friksjonskoeffisienten mellom kasse og skråplan er μ. Vi antar for enkelhets skyld at statisk og kinetisk friksjonskoeffisient er like store.

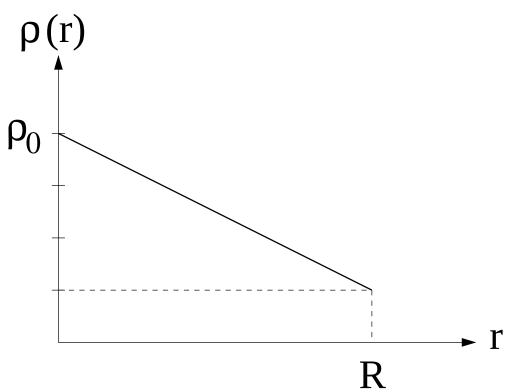
a. Tegn to figurer, en der kassen er på vei oppover skråplanet og en der kassen er på vei nedover, og angi i begge figurer alle kreftene som virker på kassen.

b. Kassen sklir en lengde L oppover skråplanet før hastigheten er redusert til null. Finn L uttrykt ved gitte størrelser. Vurder om svaret ditt er rimelig dersom skråplanet er nesten flatt og nesten friksjonsfritt, dvs $\alpha \to 0$ og $\mu \to 0$.

c. På vei opp skråplanet, over lengden L, har kassen mistet en viss brøkdel av sin opprinnelige mekaniske energi E_i, pga friksjonen mot underlaget. Finn et uttrykk for denne brøkdelen W_f/E_i, der W_f angir friksjonsarbeidet over lengden L.

d. Anta at kassen sklir ned igjen. Finn et uttrykk for kassens hastighet v_1 når den har sklidd ned hele lengden L. Hvis vinkelen α er gitt, for hvilke verdier av μ er svaret ditt gyldig? Hva skjer med kassen hvis μ har en verdi som ligger utenfor gyldighetsområdet for v_1?

Oppgave 3. **Jordas treghetsmoment (teller 15 %: 2+5+5+3)**



Figuren viser en forenklet modell for jordas massetetthet (masse pr volumenhet) $\rho(r)$. Vi antar at jorda er ei stiv kule med radius R.

a. Bruk figuren til å fastlegge konstanten α i funksjonen

$$\rho(r) = \rho_0\,(1 - \alpha r/R)$$

som beskriver hvordan massetettheten avtar fra sentrum og ut til overflaten.

b. Jordas masse kan nå skrives på formen

$$M = \beta \rho_0 R^3.$$

Vis dette, og fastlegg dermed konstanten β.

c. Jordas treghetsmoment med hensyn på en akse gjennom sentrum kan uttrykkes på formen

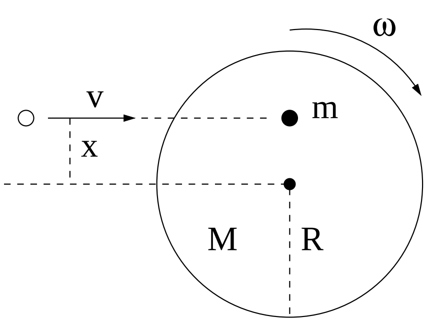
$$I_0 = \gamma M R^2.$$

Vis dette, og fastlegg dermed konstanten γ.

d. Bruk verdiene 12.6 g/cm^3 og $6.37 \cdot 10^6$ m for hhv ρ_0 og R og regn ut jordas masse og treghetsmoment. (Hvis du ikke har greid å bestemme β og γ i hhv **b** og **c**, kan du benytte de omtrentlige verdiene $\beta \simeq 1.8$ og $\gamma \simeq 0.3$.)

Oppgitt:
Volum av tynt kuleskall: $dV = 4\pi r^2 dr$.
Treghetsmoment til tynt kuleskall: $dI_0 = 2\, dm\, r^2/3$.

Oppgave 4. Hastighetsmåling (teller 20 %: 5+7+8)



Figuren viser ei sirkulær horisontaltstilt skive som kan dreie praktisk talt friksjonsfritt om en vertikal aksling gjennom skivas sentrum. Skiva har uniform massetetthet, masse $M = 10000$ g og radius $R = 10.00$ cm. Den skal benyttes til å måle hastigheten v til ei lita kule med masse $m = 20.0$ g. Kula kan betraktes som en punktmasse. Kula skytes horisontalt inn og kolliderer fullstendig uelastisk på skivas overflate i avstand $x = 5.0$ cm fra sentrum, som vist i figuren. Dette fører til at skiva, som i utgangspunktet var i ro, begynner å rotere med vinkelhastighet ω, som måles til 1.00 rad/s. Etter en grundig analyse av eksperimentet kommer du fram til at målte størrelser har følgende usikkerhet: $\Delta M = 1$ g, $\Delta m = 0.1$ g, $\Delta R = 0.01$ cm, $\Delta x = 0.1$ cm og $\Delta \omega = 0.01$ rad/s.

a. Forklar kort hvorfor verken energi- eller impulsbevarelse kan benyttes til å løse dette problemet. Forklar deretter kort hvorfor dreieimpulsbevarelse relativt skivas sentrum *kan* benyttes til å løse problemet. Skivas sentrum benyttes som referansepunkt videre i oppgaven.

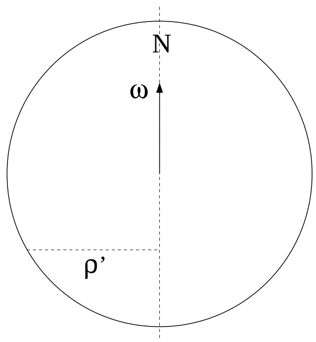
b. Finn et uttrykk for systemets dreieimpuls L_i før kula kolliderer med skiva. Finn også et uttrykk for systemets dreieimpuls L_f etter at kula har kollidert med skiva. Med utgangspunkt i tallverdiene nevnt innledningsvis, vis at kulas hastighet er gitt ved

$$v = \frac{\omega M R^2}{2mx}.$$

c. Finn et uttrykk for relativ usikkerhet i kulas hastighet, $\Delta v/v$, uttrykt ved relativ usikkerhet i samtlige målte størrelser. Foreta deretter en kritisk vurdering av hvilken eller hvilke størrelsers målefeil som bidrar signifikant til Δv, og bestem kulas hastighet med usikkerhet, på formen $v \pm \Delta v$, med ett gjeldende siffer i Δv.

Oppgitt:
Treghetsmoment for skive: $I_0 = MR^2/2$. (Se også vedlagte formler.)

Oppgave 5. Jakt på Nordpolen. (teller 20 %: 4+10+6)



I denne oppgaven er vi på jakt på Nordpolen (N) og ønsker å gjøre oss noen betraktninger knyttet til prosjektilets bane, i lys av at vi befinner oss i et roterende referansesystem (vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$), slik at prosjektilet påvirkes av både corioliskraft $\boldsymbol{F}_C$, tyngdekraft $\boldsymbol{G}$ og luftmotstand $\boldsymbol{f}$. Våre prosjektiler har masse $m = 20$ g og forlater munningen av våpenet med hastighet $u_0 = 800$ m/s, noe som er mer enn nok til at luftmotstanden hele tiden kan regnes som kvadratisk avhengig av hastigheten, dvs $f = -bu^2$, med $b = 5.4 \cdot 10^{-5}$ Ns^2/m^2. Alle skudd avfyres horisontalt.

a. Beregn tallverdier for kreftene F_C, G og f som virker på prosjektilet når det forlater geværmunningen. Hvorfor kan vi se bort fra sentrifugalkraften her?

b. Du har nå forhåpentlig konstatert at luftmotstanden f dominerer fullstendig med tanke på å bestemme prosjektilets hastighet som funksjon av tiden, $u(t)$, fra det forlater geværmunningen (ved $t = 0$) til det ankommer målet en avstand L unna (ved $t = \tau$).
Bruk Newtons andre lov og skriv ned differensialligningen for $u(t)$, i det du ser bort fra andre krefter enn luftmotstanden $f = -bu^2$.
Løs ligningen ved å integrere fra $t = 0$ til $t = t$, og vis dermed at hastigheten blir på formen

$$u(t) = \frac{u_0}{1 + \alpha t},$$

der det blir din oppgave å bestemme konstanten α uttrykt ved gitte størrelser.
Vis deretter at prosjektilet tilbakelegger distansen L i løpet av tiden

$$\tau = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha L/u_0} - 1\right).$$

Tips: $ds = u\,dt$.

c. Anta nå at $L = 150$ m. Hvor langt, Δz, faller prosjektilet mot bakken over denne strekningen? Og hvor langt, Δx, avbøyes prosjektilet mot høyre over denne strekningen?
Hvis du ikke har funnet et uttrykk for α i punkt **b**, kan du her bruke den omtrentlige verdien 13/6.
Kommenter til slutt kort om dine verdier for Δz og Δx gir grunnlag for å legge siktepunktet hhv litt høyt eller litt til venstre.

Oppgitt:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

FORMLER.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Newtons andre lov: $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{r}}$

Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Arbeid: $dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$

Friksjon, statisk: $f \le \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$

Luftmotstand (liten v): $\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{v}$ Luftmotstand (stor v): $\boldsymbol{f} = -bv^2\hat{v}$

Tyngdepunkt: $\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i \boldsymbol{r_i} m_i \to \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r} \cdot dm$

Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = -v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r\,d\omega/dt$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{F}$ Statisk likevekt: $\Sigma \boldsymbol{F}_i = 0 \quad \Sigma \boldsymbol{\tau}_i = 0$

Dreieimpuls: $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$

Stive legemer, sylindersymmetri mhp rotasjonsaksen: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_b + \boldsymbol{L}_s = (\boldsymbol{R}_{CM} - \boldsymbol{r}_0) \times M\boldsymbol{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$

Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2 dm$

Steiners sats (parallellakseteoremet): $I = I_0 + Md^2$

Gravitasjon: $\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \quad U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m \quad V(r) = U(r)/m$

Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad T = 2\pi/\omega \qquad f = 1/T = \omega/2\pi$

Masse i fjær: $\omega = \sqrt{k/m}$ Fysisk pendel: $\omega = \sqrt{mgd/I}$ Matematisk pendel: $\omega = \sqrt{g/L}$

Dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Underkritisk demping: $x(t) = Ae^{-bt/2m}\sin(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{k/m - b^2/4m^2}$

Overkritisk demping: $x(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} \qquad \tau_{1,2} = \left(b/2m \pm \sqrt{b^2/4m^2 - k/m}\right)^{-1}$

Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$

(partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$

amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}} \qquad \omega_0^2 = k/m$

Kraft $\boldsymbol{F}$ målt i koordinatsystem S som roterer med vinkelfrekvens $\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + m\omega^2\boldsymbol{\rho}' + 2m\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}$

($\boldsymbol{F}'$ er kraft målt i inertialsystemet S', $\boldsymbol{\rho}$' er avstand fra rotasjonsaksen, $\boldsymbol{u}$ er hastighet målt i S.)

Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q}{\partial a_i}\Delta a_i\right)^2$

Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right)}$

Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\overline{x}} = \delta_x/\sqrt{N}$

GOD JUL!