NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen: Jon Andreas Støvneng, telefon: 45 45 55 33

EKSAMEN I FY1001 og TFY4145 MEKANISK FYSIKK

Mandag 6. august 2012 kl. 0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler (kode C):

- Bestemt enkel godkjent kalkulator.
- Rottmann: Matematisk formelsamling.
- C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Vedlagt formelark (side 8).

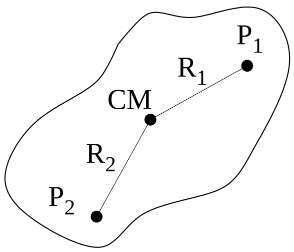
Sensurdato: Senest 27. august 2012.

Prosenttallene i parentes gitt ved hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen. I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.
Noen generelle merknader:
- Symboler i kursiv (f.eks. m for masse), enheter uten kursiv (f.eks. m for meter)
- Vektorer med fete bokstaver (f.eks. $\boldsymbol{p}$)
- $\hat{x}$ er enhetsvektor i x-retning etc.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C eller D. Rett svar gir 2.5 p, galt svar (eller flere svar) gir 0 p.

Oppgave 1. Ti flervalgsspørsmål (teller 2.5 × 10 = 25%)

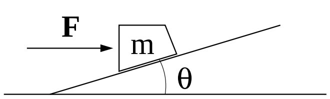
a.



For legemet i figuren er $R_1 = R_2$, og CM angir tyngdepunktet. Punktene CM, P_1 og P_2 ligger alle i papirplanet. Treghetsmomentene om parallelle akser (normalt på papirplanet) gjennom CM, P_1 og P_2 er hhv I_0, I_1 og I_2. Da er

A) $I_0 < I_1 = I_2$.
B) $I_0 > I_1 = I_2$.
C) $I_0 = I_1 = I_2$.
D) $I_0 < I_1 < I_2$.

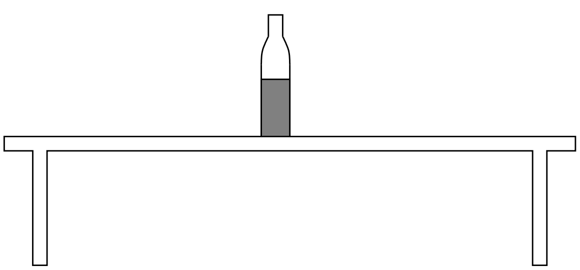
b.



En horisontal kraft $\boldsymbol{F}$ blir brukt for å skyve en gjenstand med masse m oppover et skråplan. Vinkelen mellom skråplanet og horisontalplanet er θ. Normalkraften som virker fra skråplanet på massen m er da

A) $mg\cos\theta + F\cos\theta$.
B) $mg\cos\theta$.
C) $mg\cos\theta - F\cos\theta$.
D) $mg\cos\theta + F\sin\theta$.

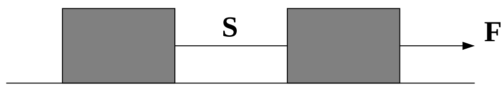
c.



En flaske vin står i ro på et horisontalt bord. Flaskens vekt er i tallverdi like stor som kraften som virker fra bordet på flasken. Hvorfor?

A) På grunn av Newtons 1. lov.
B) På grunn av Newtons 3. lov.
C) På grunn av at flasken ikke er tom.
D) På grunn av at bordplaten er et stivt legeme.

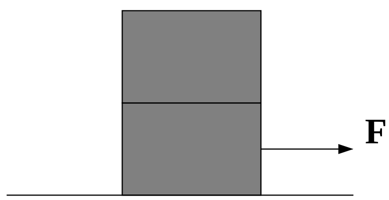
<u>d</u>.



To like tunge kasser er festet til hverandre med et tau. Du drar med en kraft F i et annet tau som er festet i kassa til høyre, slik at begge kassene beveger seg mot høyre. Hva er snordraget S i tauet mellom de to kassene? (Begge tauene er tilnærmet masseløse.)

A) $S = F/3$ B) $S = F/2$ C) $S = F$ D) $S = 2F$

<u>e</u>.



De to like tunge kassene (hver med masse m) er nå plassert oppå hverandre. I kontaktflaten mellom de to kassene gjør en friksjonskoeffisient μ seg gjeldende. Du drar med en kraft F i et tau som er festet i den underste kassa, slik at begge kassene beveger seg mot høyre med konstant fart v. Hva er friksjonskraften mellom de to kassene?

A) Null B) μmg C) $2\mu mg$ D) F

<u>f</u>. I oppgave **<u>e</u>**, hva er friksjonskraften mellom den underste kassa og underlaget?

A) Null B) μmg C) $2\mu mg$ D) F

<u>g</u>. Dersom relativ usikkerhet i masse og hastighet er hhv $\Delta m/m$ og $\Delta v/v$, hva blir da relativ usikkerhet i kinetisk energi?

A) $\sqrt{\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta v}{v}}$

B) $\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta v}{v}\right)^2}$

C) $\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2}$

D) $\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^4 + \left(\frac{2\Delta v}{v}\right)^4}$

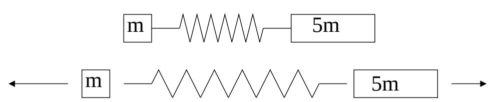
h.

```
[t,x,y]=textread('legeme.txt','%f %f %f');
N=length(t);
A=zeros(1,N);
B=zeros(1,N);
for i=2:N-1
    A(i)=(x(i+1)-x(i-1))/(t(i+1)-t(i-1));
    B(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(t(i+1)-t(i-1));
    C(i)=atan(x(i)/y(i));
    D(i)=sqrt(x(i)*x(i)+y(i)*y(i));
    E(i)=sqrt(A(i)*A(i)+B(i)*B(i));
    F(i)=D(i)*E(i);
end
```

Matlabkoden til venstre leser, fra fila legeme.txt, sammenhørende verdier for tid (t) og kartesiske koordinater (x, y) for et tilnærmet punktformet legeme som følger en sirkulær bane. Hvilken fysisk størrelse representerer da F i programmet?

A) Kinetisk energi pr masseenhet.
B) Lineær impuls pr masseenhet.
C) Dreieimpuls, relativt origo, pr masseenhet.
D) Sentripetalakselerasjon.

i.



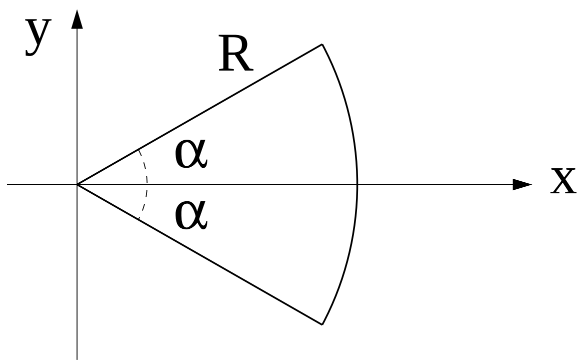
To masser, m og $5m$, ligger på et friksjonsfritt bord på hver sin side av en spent fjær. Når fjærlåsen åpnes, skyves de to massene i hver sin retning. Hvordan fordeles den potensielle energien i den spente fjæra på kinetisk energi til de to massene?

A) 33 % på m, 67 % på $5m$ B) 67 % på m, 33 % på $5m$
C) 17 % på m, 83 % på $5m$ D) 83 % på m, 17 % på $5m$

j. Treghetsmomentet til en bordtennisball, mhp en akse gjennom bordtennisballens sentrum, er, målt i SI-enheter, av størrelsesorden

A) $7 \cdot 10^{-11}$ B) $7 \cdot 10^{-7}$ C) $7 \cdot 10^{-3}$ D) 70

Oppgave 2. **(teller 30 %: 5+8+12+5)**



Ei tynn, jevntykk skive er en del av ei sirkulær skive, har sektorvinkel 2α, og ligger i xy-planet som vist i figuren. Sirkelradien er R, og skiva har konstant masse σ pr flateenhet.

a. Regn ut (eller skriv ned) et uttrykk for skivas masse M.

b. Bestem skivas tyngdepunkt $\boldsymbol{R}_{CM} = (X_{CM}, Y_{CM})$. Er resultatet rimelig for $\alpha = \pi$? Enn for $\alpha \to 0$?

c. Bestem skivas treghetsmoment I_x med hensyn på rotasjon om x-aksen. Bestem deretter skivas treghetsmoment I_y med hensyn på rotasjon om y-aksen. Bestem til slutt skivas treghetsmoment I_z med hensyn på rotasjon om z-aksen. Skriv treghetsmomentene på formen $I_x = \sigma R^4 f(\alpha)$, $I_y = \sigma R^4 g(\alpha)$ og $I_z = \sigma R^4 h(\alpha)$, og tegn opp de tre dimensjonsløse funksjonene f, g og h i samme figur, som funksjon av vinkelen α i området $0 < \alpha < \pi$.

d. Diskuter de tre spesifikke resultatene *i)* $I_y > I_x$ for små verdier av α, *ii)* $I_y = I_x$ for $\alpha = \pi/2$, og *iii)* $I_y = I_x$ for $\alpha = \pi$. (Dvs: Vurder om disse resultatene er rimelige.)

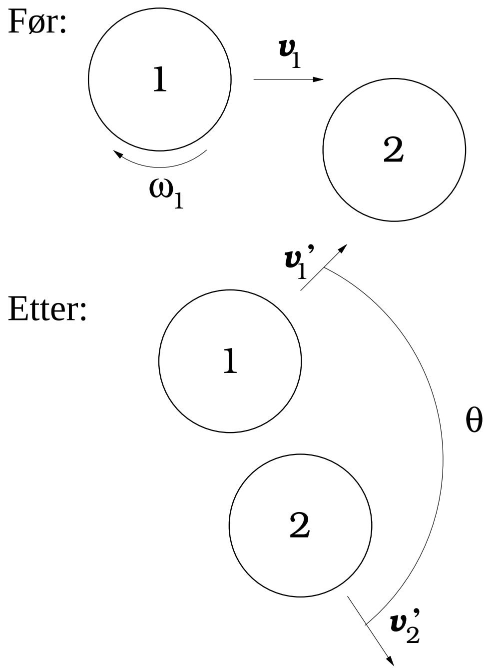
Oppgitt:
Flateelement i polarkoordinater: $dA = r d\phi \cdot dr$
Et par potensielt nyttige trigonometriske relasjoner:

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \quad , \quad \cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos 2\phi$$

Dessuten:

$$\sin\phi \simeq \phi \quad \text{hvis} \quad |\phi| \ll 1$$

Oppgave 3. (teller 15 %: 5+10)

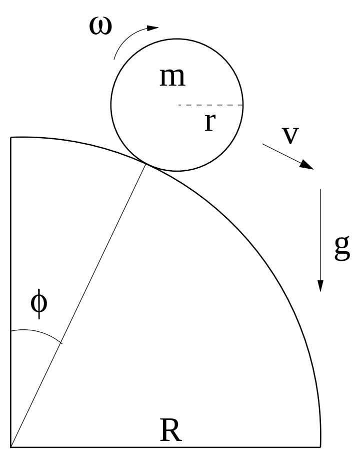


To identiske sirkulære skiver kolliderer på et friksjonsfritt underlag. Kollisjonen er delvis uelastisk, og det virker friksjonskrefter mellom de to skivene i berøringspunktet i kollisjonsøyeblikket. Før kollisjonen ligger skive nr 2 i ro mens skive nr 1 har hastighet $\boldsymbol{v}_1$. Etter kollisjonen har skive 1 og 2 hastighet hhv $\boldsymbol{v}_1'$ og $\boldsymbol{v}_2'$ (figur til venstre, der vi ser systemet i fugleperspektiv).

a. Systemet bestående av de to skivene har total kinetisk energi E_i, total impuls $\boldsymbol{p}_i$ og total dreieimpuls $\boldsymbol{L}_i$ (relativt et passende valgt referansepunkt) før kollisjonen (i for *initial*). Tilsvarende størrelser etter kollisjonen er hhv E_f, $\boldsymbol{p}_f$ og $\boldsymbol{L}_f$ (f for *final*). Forklar hvorfor kinetisk energi E ikke er bevart i kollisjonen. Forklar videre hvorfor både $\boldsymbol{p}$ og $\boldsymbol{L}$ er bevarte størrelser.

b. Ta utgangspunkt i impulsbevarelse (tips: kvadrer ligningen!) og vis at kinetisk *translasjonsenergi* E^{trans} kan minke, øke eller forbli uendret som følge av kollisjonen, avhengig av vinkelen θ mellom de to sluthastighetene (se figur). Hvordan vil du forklare at translasjonsenergien kan øke i en slik kollisjon?

Oppgave 4. **(teller 30 %: 5+5+10+10)**



I denne oppgaven skal vi se på et sylindersymmetrisk legeme (masse m, radius r) som ruller (uten å gli) på en sirkelformet overflate (radius R). Legemets massesenter har hastighet v langs sirkelbanen, og legemets vinkelhastighet er ω. Vinkelen ϕ angir legemets posisjon, som vist i figuren til venstre. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom legemet og underlaget er μ. Tyngdens akselerasjon er g. Legemet holdes i ro ved vinkelen ϕ_0 ($0 < \phi_0 \ll 1$) og slippes ved tidspunktet $t = 0$. Legemets treghetsmoment med hensyn på rotasjon om massesenteret er $I_0 = cmr^2$, der c ($c < 1$) er et tall som avhenger av legemets massefordeling.

a. Tegn en figur som viser alle kreftene som virker på legemet (etter at vi har sluppet det). Figuren må inneholde vinkelen ϕ, og retning og angrepspunkt på alle kreftene må komme tydelig fram.

b. Skriv ned en sammenheng mellom v og ω. Skriv også ned en sammenheng mellom v og ϕ (eller mer presist: mellom v og $d\phi/dt$).

c. Bruk Newtons 2. lov og skriv ned bevegelsesligningene (i alt 3 ligninger) for det rullende legemet. Bruk deretter to av bevegelsesligningene og sammenhengene fra punkt **b** til å vise at vinkelen $\phi(t)$ oppfyller differensialligningen

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \Omega^2 \sin\phi = 0,$$

der Ω kan uttrykkes ved gitte størrelser (g, c, r og R). Kontroller at uttrykket ditt for Ω har korrekt enhet.

d. Ligningen for $\phi(t)$ har ingen enkel generell løsning, men for små verdier av ϕ, dvs $\phi \ll 1$, kan ligningen forenkles ved å benytte $\sin\phi \simeq \phi$. Løsningen kan da skrives på formen

$$\phi(t) = A\cosh\Omega t + B\sinh\Omega t.$$

Vis dette ved innsetting. Bruk initialbetingelsene gitt innledningsvis til å fastlegge koeffisientene A og B. Skisser til slutt grafen til $\phi(t)$ (for $t \ge 0$).

FORMLER.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Newtons andre lov: $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{r}}$

Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Arbeid: $dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$

Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$

Luftmotstand (liten v): $\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{v}$ Luftmotstand (stor v): $\boldsymbol{f} = -bv^2\hat{v}$

Tyngdepunkt: $\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i \boldsymbol{r_i} m_i \to \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r} \cdot dm$

Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = -v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r\,d\omega/dt$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{F}$ Statisk likevekt: $\Sigma \boldsymbol{F}_i = 0 \quad \Sigma \boldsymbol{\tau}_i = 0$

Dreieimpuls: $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$

Stive legemer, sylindersymmetri mhp rotasjonsaksen: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_b + \boldsymbol{L}_s = (\boldsymbol{R}_{CM} - \boldsymbol{r}_0) \times M\boldsymbol{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$

Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2 dm$

Steiners sats (parallellakseteoremet): $I = I_0 + Md^2$

Gravitasjon: $\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \quad U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m \quad V(r) = U(r)/m$

Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad T = 2\pi/\omega \qquad f = 1/T = \omega/2\pi$

Masse i fjær: $\omega = \sqrt{k/m}$ Fysisk pendel: $\omega = \sqrt{mgd/I}$ Matematisk pendel: $\omega = \sqrt{g/L}$

Dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Underkritisk demping: $x(t) = Ae^{-bt/2m}\sin(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{k/m - b^2/4m^2}$

Overkritisk demping: $x(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} \qquad \tau_{1,2} = \left(b/2m \pm \sqrt{b^2/4m^2 - k/m}\right)^{-1}$

Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$

(partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$

amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}} \qquad \omega_0^2 = k/m$

Kraft $\boldsymbol{F}$ målt i koordinatsystem S som roterer med vinkelfrekvens $\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + m\omega^2\boldsymbol{\rho}' + 2m\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}$

($\boldsymbol{F}'$ er kraft målt i inertialsystemet S', $\boldsymbol{\rho}$' er avstand fra rotasjonsaksen, $\boldsymbol{u}$ er hastighet målt i S.)

Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q}{\partial a_i}\,\Delta a_i\right)^2$

Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right)}$

Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\overline{x}} = \delta_x/\sqrt{N}$