NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen: Jon Andreas Støvneng, telefon: 45 45 55 33 / 73 59 36 63

EKSAMEN I FY1001 og TFY4145 MEKANISK FYSIKK

Tirsdag 18. desember 2012 kl. 0900 - 1300

Bokmål

Tillatte hjelpemidler (kode C):

- Bestemt enkel godkjent kalkulator.
- Rottmann: Matematisk formelsamling.
- C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Vedlagt formelark (side 7).

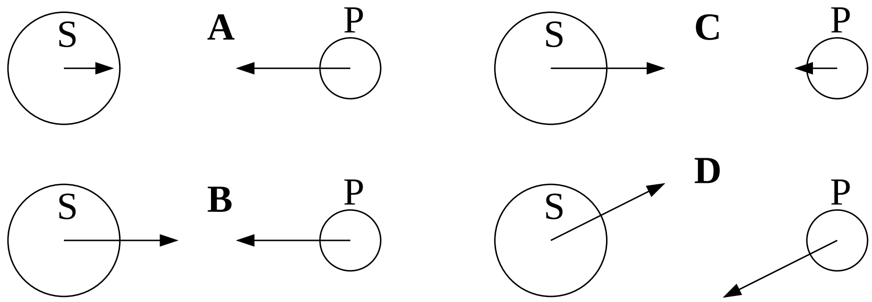
Sensurdato: Senest 18. januar 2013.

Prosenttallene i parentes gitt ved hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen. I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.
Noen generelle merknader:
- Symboler i kursiv (f.eks. m for masse), enheter uten kursiv (f.eks. m for meter)
- Vektorer med fete bokstaver (f.eks. $\boldsymbol{p}$)
- $\hat{x}$ er enhetsvektor i x-retning etc.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C eller D. Rett svar gir 2.5 p, galt svar (eller flere svar) gir 0 p. Skriv svarene dine på et vanlig svarark.

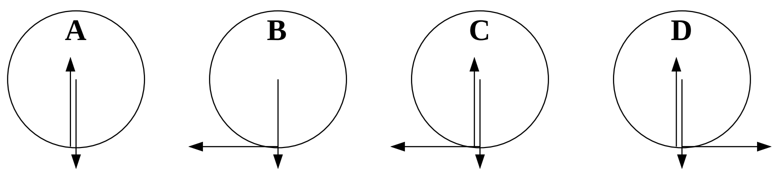
Oppgave 1. **Ti flervalgsspørsmål. (Teller 25%)**

a.



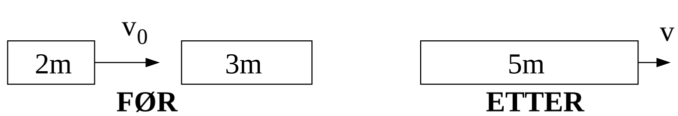
Hvilken figur angir korrekt de innbyrdes kreftene mellom stjerne (S) og planet (P)?

b.



Ei kule ruller med konstant hastighet på et horisontalt underlag, uten å gli ("ren rulling"). Hvilken figur viser kreftene som virker på kula?

c.

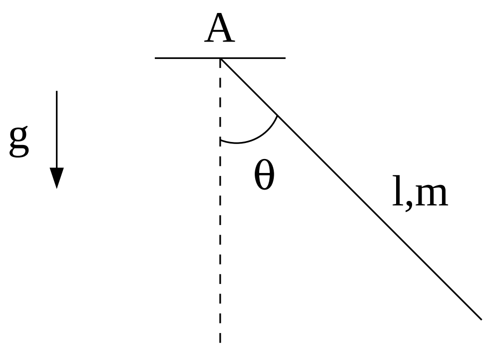


En kloss med masse $2m$ kolliderer fullstendig uelastisk med en kloss med masse $3m$. Før kollisjonen har klossen med masse $2m$ hastighet v_0 mens klossen med masse $3m$ ligger i ro. Etter kollisjonen har klossene felles hastighet v. Hvor mye mekanisk energi har gått tapt i kollisjonen?

A $mv_0^2/3$ B $2mv_0^2/5$
C $3mv_0^2/5$ D mv_0^2

d.
Dersom relativ usikkerhet i masse og hastighet er hhv $\Delta m/m$ og $\Delta v/v$, hva blir da relativ usikkerhet i kinetisk energi?

A $\sqrt{2(\Delta m/m)^2 + (\Delta v/v)^2}$ B $\sqrt{(\Delta m/m)^2 + 2(\Delta v/v)^2}$
C $\sqrt{(\Delta m/m)^2 + 4(\Delta v/v)^2}$ D $\sqrt{(\Delta m/m)^2 + (\Delta v/v)^2}$



Figuren til venstre er knyttet til oppgavene 1e - 1j. Ei tynn og jevntykk stang med lengde l og masse m kan svinge fritt om festepunktet A. Stangas treghetsmoment med hensyn på en akse vinkelrett på stanga og gjennom dens massesenter er $I_0 = ml^2/12$. Stangas bevegelse kan beskrives ved vinkelen θ mellom stanga og vertikalretningen. ($\theta > 0$ for utsving mot høyre, som i figuren.)

e. Hva er stangas treghetsmoment I_A med hensyn på en akse vinkelrett på stanga og gjennom festepunktet A (dvs parallell med aksen gjennom massesenteret, nevnt innledningsvis)?

A $ml^2/3$ B $ml^2/4$ C $ml^2/6$ D $ml^2/12$

f. Hva er tyngdekraftens dreiemoment τ_A med hensyn på festepunktet A?

A $-mgl/2$ B $-(mgl/2)\tan\theta$ C $-(mgl/2)\cos\theta$ D $-(mgl/2)\sin\theta$

g. Stangas vinkelhastighet er $\dot{\theta} = d\theta/dt$. Hva er stangas dreieimpuls L_A med hensyn på festepunktet A?

A $ml^2\dot{\theta}$ B $ml^2\dot{\theta}/2$ C $ml^2\dot{\theta}/3$ D $ml^2\dot{\theta}/5$

h. Anta at stanga slippes med null starthastighet fra horisontal orientering ($\theta = \pi/2$). Hva blir da stangas vinkelhastighet $\dot{\theta}$ som funksjon av vinkelen θ? (Tips: Energibevarelse.)

A $\sqrt{3g\cos\theta/l}$ B $\sqrt{3g\sin\theta/l}$ C $\sqrt{3g\tan\theta/l}$ D $\sqrt{3g(1-\cos\theta)/l}$

i. Fra sin horisontale orientering ($\theta = \pi/2$), hvor lang tid tar det (omtrent) for stanga å svinge over til motsatt side ($\theta = -\pi/2$)? Oppgitt:

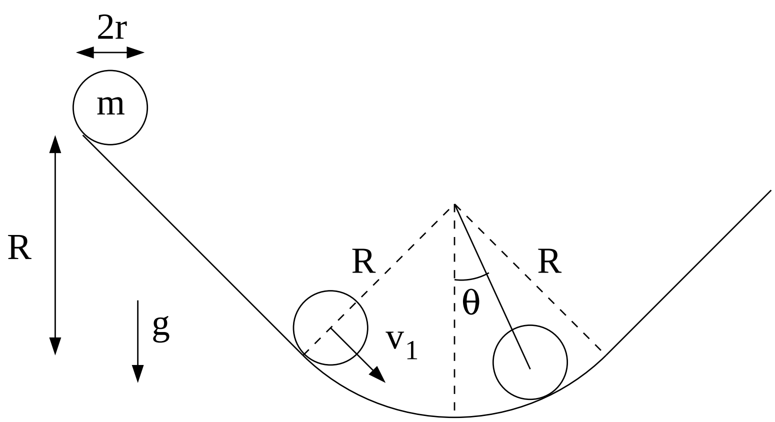
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} \simeq 5.244$$

A $6\sqrt{g/l}$ B $3\sqrt{g/l}$ C $3\sqrt{l/g}$ D $6\sqrt{l/g}$

j. Hvis stanga slippes fra en *liten* startvinkel θ_0 (dvs $\theta_0 \ll 1$), vil den svinge fram og tilbake som en harmonisk oscillator, med svingeperiode

A $\sqrt{8\pi^2 g/3l}$ B $\sqrt{2\pi^2 g/l}$ C $\sqrt{2\pi^2 l/g}$ D $\sqrt{8\pi^2 l/3g}$

<u>Oppgave 2.</u> Ren rulling. (Teller 35%)



Ei massiv kule har masse m, radius r og treghetsmoment $I_0 = 2mr^2/5$ med hensyn på en akse gjennom massesenteret. Kula ruller uten å gli ("ren rulling"), først nedover et skråplan med helningsvinkel $\pi/4$ og lengde $\sqrt{2}R$ (pkt a - e), og deretter på "innsiden" av en kvartsirkel med radius $R > r$ (pkt f - g). Kula slippes med null starthastighet ved toppen av skråplanet. Friksjonskoeffisienten mellom kule og underlag er μ.

<u>a</u>. Tegn en figur ("fritt-legeme-diagram") som viser kreftene som virker på kula når den ruller nedover skråplanet.

<u>b</u>. Hva er normalkraften N fra underlaget på kula når den ruller nedover skråplanet?

<u>c</u>. Hva er kulas hastighet v_1 ved overgangen fra skråplan til kvartsirkel? (Tips: Energibevarelse.)

<u>d</u>. Hva er friksjonskraften f fra underlaget på kula når den ruller nedover skråplanet? (Tips: N2 for translasjon og rotasjon.)

<u>e</u>. Hvor stor må friksjonskoeffisienten μ minst være for at kula skal rulle uten å gli nedover skråplanet?

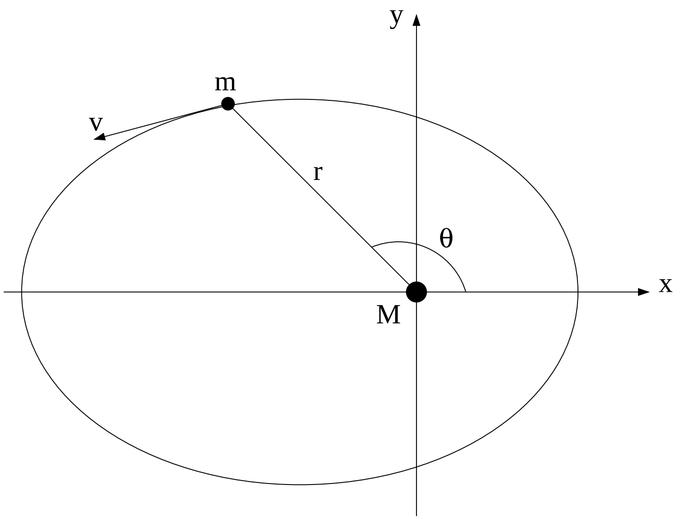
<u>f</u>. Finn et uttrykk for normalkraften $N(\theta)$ fra underlaget på kula når den ruller på kvartsirkelen ($|\theta| < \pi/4$). (Tips: Energibevarelse og sentripetalakselerasjon. Hvis du ikke har et uttrykk for v_1 fra punkt c, kan v_1 inngå i svaret.)

<u>g</u>. Dersom kula ruller fram og tilbake omkring bunnen av banen, med liten amplitude θ_0, beskrives bevegelsen av ligningen for en harmonisk oscillator,

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0.$$

Vis dette, og finn derved et uttrykk for svingebevegelsens vinkelfrekvens Ω. (Tips: N2 for translasjon og rotasjon, samt tilnærmelsen $\sin x = x$ når $|x| \ll 1$.)

Oppgave 3. Planetbane. (Teller 20%)



En planet (masse m) beveger seg i ellipseformet bane rundt sola (masse $M \gg m$). Vi antar at sola står i ro i origo. Planetens bane, i polarkoordinater, er da gitt ved

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos\theta} \ .$$

Her er

$$\varepsilon = \left(1 + 2EL^2/G^2M^2m^3\right)^{1/2}$$

banens eksentrisitet ($0 < \varepsilon < 1$),

$$r_0 = L^2/GMm^2$$

er planetens avstand fra sola når $\theta = \pm\pi/2$, $E = mv^2/2 - GMm/r < 0$ er planetens energi, $L = mr^2\dot{\theta}$ er dens (bane-)dreieimpuls, og G er den universelle gravitasjonskonstanten. Vi kan her se bort fra planetens "indre" dreieimpuls knyttet til rotasjon omkring aksen gjennom planetens massesenter.

a. Argumenter kort for at planetens energi E er bevart. Argumenter også kort for at dens dreieimpuls $\boldsymbol{L}$ er bevart.

b. Tegn opp figuren ovenfor og angi hvor planeten er henholdsvis nærmest (r_1) og lengst unna (r_2) sola. Skriv ned r_1 og r_2 (uttrykt ved ε og r_0).

c. Planetens hastighet $\boldsymbol{v}$ har både en radiell komponent $\dot{r}\hat{r}$ og en angulær komponent $r\dot{\theta}\hat{\theta}$. Bruk dette til å uttrykke energien på formen

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{A}{r^2} - \frac{GMm}{r},$$

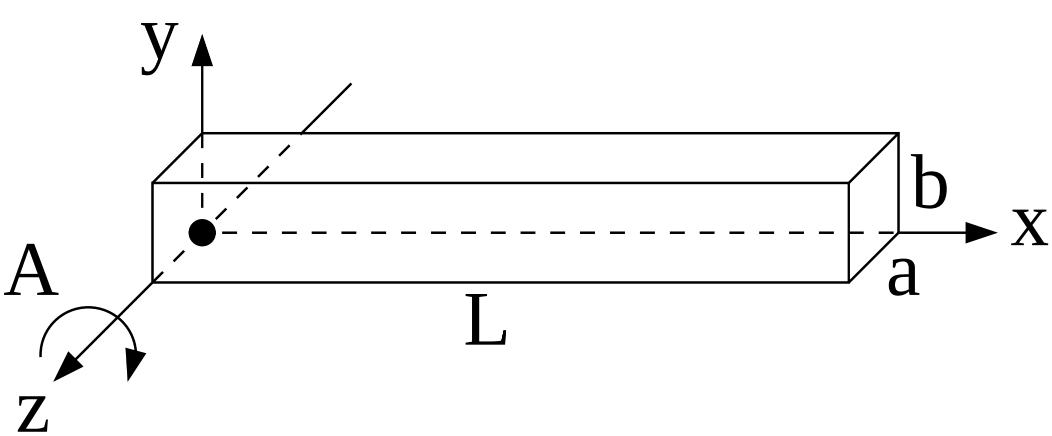
og fastlegg derved (den positive) konstanten A. Dette betyr at planetens bevegelse i *to* dimensjoner, med potensiell energi $U(r) = -GMm/r$, er ekvivalent med bevegelse i *en* dimensjon (r), med potensiell energi $\tilde{U}(r) = A/r^2 - GMm/r$.

d. Skisser funksjonen $\tilde{U}(r)$. For hvilken verdi av r har $\tilde{U}$ sitt minimum? Merk av i skissen for $\tilde{U}(r)$ en verdi $E < 0$ for planetens totale energi som tilsvarer en ellipseformet bane. Indiker i skissen hvilket $r-$intervall planeten beveger seg på.

Oppgave 4. Numerikk. (Teller 10%)

Fra uttrykket for energien E i oppgave 3c kan (den radielle komponenten av) hastigheten skrives på formen $dr/dt = V(r)$. Bruk dette som utgangspunkt til å formulere en oppskrift ("algoritme") som beregner planetens bevegelse, $r(t)$ og $\theta(t)$, med en enkel numerisk metode. Tips: Bruk konstant tidssteg dt og anta at $r(0) = r_1$ og $\theta(0) = 0$. Formuler en løkke ("while-løkke") som oppdaterer r først, og deretter θ (som kan finnes når r er bestemt, se innledningen i oppgave 3). Løkken gjentas så lenge $r < r_2$. Du kan anta at alle konstanter (E, M etc) som inngår i uttrykket for $V(r)$ allerede har fått tilordnet tallverdier i programmet. Prøv å tilordne en noenlunde fornuftig verdi på tidssteget dt, uttrykt ved de ulike konstantene som inngår i problemet. NB: Det legges *ikke* vekt på syntaks. Det er med andre ord ikke nødvendig å huske spesifikke kommandoer i (f.eks) matlab. En oppskrift med 5 – 10 linjer er tilstrekkelig.

Oppgave 5. Treghetsmoment. (Teller 10%)



En rektangulær bjelke har uniform massetetthet, total masse M og dimensjoner L, b og a langs henholdsvis x-, $y-$ og z-aksen. Bjelken kan rotere om en akse A, her sammenfallende med z-aksen, se figur ovenfor. (Origo er merket med en svart sirkel.) Bestem bjelkens treghetsmoment I_A med hensyn på aksen A. Tips: Legg sammen (integrer) bidragene $(x^2 + y^2)dm$ for tynne staver parallelle med z-aksen (tverrsnitt $dx \cdot dy$) slik at hele bjelken regnes med.

FORMLER.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Newtons andre lov: $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{r}}$

Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Arbeid: $dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$

Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$

Luftmotstand (liten v): $\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{v}$ Luftmotstand (stor v): $\boldsymbol{f} = -bv^2\hat{v}$

Tyngdepunkt (Massesenter): $\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i \boldsymbol{r_i} m_i \to \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r} \cdot dm$

Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = -v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r\, d\omega/dt$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{F}$ Statisk likevekt: $\Sigma \boldsymbol{F}_i = 0 \quad \Sigma \boldsymbol{\tau}_i = 0$

Dreieimpuls: $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$

Stive legemer, sylindersymmetri mhp rotasjonsaksen: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_b + \boldsymbol{L}_s = (\boldsymbol{R}_{CM} - \boldsymbol{r}_0) \times M\boldsymbol{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$

Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2 dm$

Steiners sats (parallellakseteoremet): $I = I_0 + Md^2$

Gravitasjon: $\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \quad U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m \quad V(r) = U(r)/m$

Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad T = 2\pi/\omega \qquad f = 1/T = \omega/2\pi$

Masse i fjær: $\omega = \sqrt{k/m}$ Fysisk pendel: $\omega = \sqrt{mgd/I}$ Matematisk pendel: $\omega = \sqrt{g/L}$

Dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Underkritisk demping ($\gamma = b/2m$, $\omega_0^2 = k/m$): $x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Overkritisk demping: $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t} \qquad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$

(partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$

amplitude: $A(\omega) = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \qquad \omega_0^2 = k/m$

Kraft $\boldsymbol{F}$ målt i koordinatsystem S som roterer med vinkelfrekvens $\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + m\omega^2\boldsymbol{\rho}' + 2m\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}$
($\boldsymbol{F}'$ er kraft målt i inertialsystemet S', $\boldsymbol{\rho}$' er avstand fra rotasjonsaksen, $\boldsymbol{u}$ er hastighet målt i S.)

Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q}{\partial a_i}\Delta a_i\right)^2$

Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right)}$

Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\overline{x}} = \delta_x/\sqrt{N}$

GOD JUL!

FORMLER.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Newtons andre lov: $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{r}}$

Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Arbeid: $dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$

Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$

Luftmotstand (liten v): $\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{v}$ Luftmotstand (stor v): $\boldsymbol{f} = -bv^2\hat{v}$

Tyngdepunkt: $\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i \boldsymbol{r_i} m_i \to \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r} \cdot dm$

Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = -v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r\, d\omega/dt$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{F}$ Statisk likevekt: $\Sigma \boldsymbol{F}_i = 0 \quad \Sigma \boldsymbol{\tau}_i = 0$

Dreieimpuls: $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$

Stive legemer, sylindersymmetri mhp rotasjonsaksen: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_b + \boldsymbol{L}_s = (\boldsymbol{R}_{CM} - \boldsymbol{r}_0) \times M\boldsymbol{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$

Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2 dm$

Steiners sats (parallellakseteoremet): $I = I_0 + Md^2$

Gravitasjon: $\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \quad U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m \quad V(r) = U(r)/m$

Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad T = 2\pi/\omega \qquad f = 1/T = \omega/2\pi$

Masse i fjær: $\omega = \sqrt{k/m}$ Fysisk pendel: $\omega = \sqrt{mgd/I}$ Matematisk pendel: $\omega = \sqrt{g/L}$

Dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Underkritisk demping: $x(t) = Ae^{-bt/2m}\sin(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{k/m - b^2/4m^2}$

Overkritisk demping: $x(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} \qquad \tau_{1,2} = \left(b/2m \pm \sqrt{b^2/4m^2 - k/m}\right)^{-1}$

Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$

(partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$

amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}} \qquad \omega_0^2 = k/m$

Kraft $\boldsymbol{F}$ målt i koordinatsystem S som roterer med vinkelfrekvens $\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + m\omega^2\boldsymbol{\rho}' + 2m\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}$

($\boldsymbol{F}'$ er kraft målt i inertialsystemet S', $\boldsymbol{\rho}$' er avstand fra rotasjonsaksen, $\boldsymbol{u}$ er hastighet målt i S.)

Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q}{\partial a_i}\Delta a_i\right)^2$

Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right)}$

Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\overline{x}} = \delta_x/\sqrt{N}$