NTNU
Det skapende universitet

Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i
FY1001 Mekanisk fysikk
TFY4145 Mekanisk fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Jon Andreas Støvneng

Tlf.: 45 45 55 33

Eksamensdato: 7. august 2013

Eksamenstid (fra-til): 0900-1300

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: ***C (Godkjent kalkulator; Rottmann, Matematisk formelsamling; Angell og Lian, Fysiske størrelser og enheter)***

Annen informasjon: I flervalgsoppgavene på Oppgave 1 er kun ett av svarene rett. Du svarer A, B, C eller D. Rett svar gir 2.5 poeng. Feil svar, flere svar eller ingen svar gir 0 poeng. Skriv svarene dine på et vanlig svarark.
Eksamen teller 90% på sluttkarakteren. Labrapport teller 10%. (For studenter med godkjent lab fra 2011 eller tidligere teller eksamen 100%.)
Sensuren legges ut på hjemmesiden senest 28. august.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider med oppgaver: 5 (sidene 2-6)

Antall sider vedlegg (formler og uttrykk): 1 (side 7)

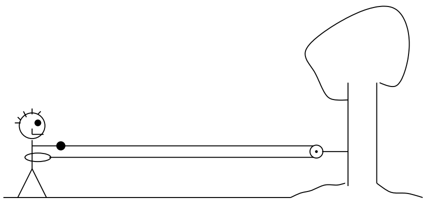
Kontrollert av:

Dato Sign

Eksamen FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk kl 09.00 - 13.00 onsdag 7. august 2013

Oppgave 1. Ti flervalgsspørsmål. (Teller 25%)

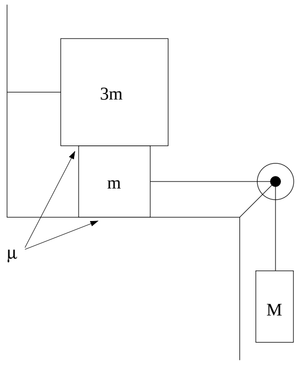
a.



Du har masse M og står på den glatte, friksjonsfrie isen og trekker med en kraft F i det tilnærmet masseløse tauet, som går via den friksjonsfrie trinsen og tilbake til deg, der du har knyttet det fast rundt midjen. Hvor stor akselerasjon får du?

A F/M B $2F/M$ C $3F/M$ D $4F/M$

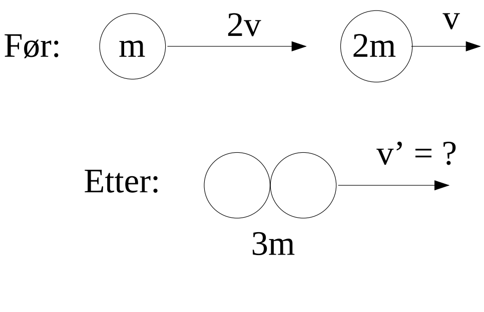
b.



En kasse med masse $3m$ ligger oppå en mindre kasse med masse m, som igjen ligger på et fast underlag. Statisk friksjonskoeffisient mellom de to kassene og mellom kasse og underlag er μ. Øverste kasse er festet til veggen med ei stang. Et tau går fra nederste kasse via ei friksjonsfri trinse til et lodd med masse M, som vist i figuren. Hvor stor kan M være uten at nederste kasse begynner å gli?

A μm B $3\mu m$ C $4\mu m$ D $7\mu m$

c.

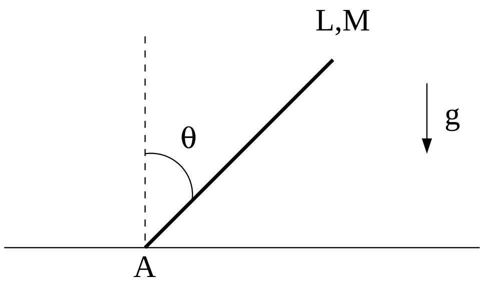


To masser, m og $2m$, beveger seg langs samme rette linje med hastighet hhv $2v$ og v. Etter en fullstendig uelastisk kollisjon henger de to massene sammen og beveger seg med hastighet $v' = \alpha v$. Hvor stor er α?

A 3/2 B 2/3 C 3/4 D 4/3

d. For ei kompakt kule med uniform tetthet måles massen og radien til hhv 1.000 ± 0.001 kg og 10.0 ± 0.1 cm. Med hvilken relativ usikkerhet $(\Delta I/I)$ er da kulas treghetsmoment bestemt?

A 1% B 2% C 3% D 4%



Figuren til venstre er knyttet til de fire oppgavene 1e - 1h. En jevntykk trestamme med lengde L og masse M kuttes nede ved bakken og faller ned ved å rotere essensielt fritt omkring kontaktpunktet på bakken (merket A). Stammen står i utgangspunktet vertikalt ($\theta = 0$), og har praktisk talt null vinkelhastighet $\dot{\theta}$ i det den begynner å falle. Stammen har treghetsmoment $I_A = ML^2/3$ med hensyn på en akse vinkelrett på stammen gjennom kontaktpunktet A.

e. Hva er stammens treghetsmoment I_{CM} med hensyn på en akse vinkelrett på stammen og gjennom dens massesenter (dvs parallell med aksen gjennom A, nevnt innledningsvis) ?

A $ML^2/3$ B $ML^2/4$ C $ML^2/6$ D $ML^2/12$

f. Hva er tyngdekraftens dreiemoment τ_A, med hensyn på kontaktpunktet A, når stammen har falt en viss vinkel θ ?

A $(MgL/2)(1 - \cos\theta)$ B $(MgL/2)\sin\theta$ C $(MgL/2)\cos\theta$ D $(MgL/2)\tan\theta$

g. Hva er stammens dreieimpuls L_A med hensyn på kontaktpunktet A?

A $ML^2\dot{\theta}$ B $ML^2\dot{\theta}/2$ C $ML^2\dot{\theta}/3$ D $ML^2\dot{\theta}/5$

h. Hva er stammetoppens hastighet umiddelbart før den treffer bakken?

A $\sqrt{2gL}$ B $\sqrt{3gL}$ C $\sqrt{4gL}$ D $\sqrt{5gL}$

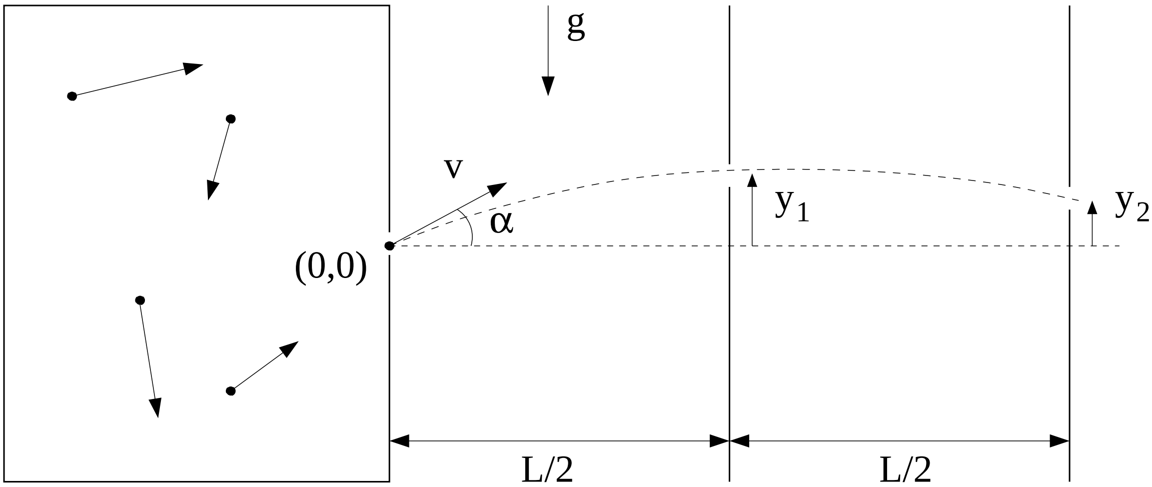
i. Dersom et eple bruker tiden T på å falle (med null starthastighet) fra en høyde h her på jorda, hvor lang tid bruker det samme eplet på å falle fra samme høyde på en planet med masse lik 1/8 av jordmassen og radius lik halve jordradien? (Se bort fra luftmotstand og andre former for friksjon i denne og neste oppgave.)

A $T/2$ B $2T$ C $\sqrt{2}T$ D $T/\sqrt{2}$

j. Dersom eplet som falt fra høyden h her på jorda i forrige oppgave har hastighet v i det det treffer bakken, hvor stor hastighet ville det samme eplet ha hatt etter å ha falt fra samme høyde h på planeten med masse 1/8 av jordmassen og radius lik halve jordradien?

A $v/2$ B $2v$ C $\sqrt{2}v$ D $v/\sqrt{2}$

<u>Oppgave 2.</u> Skrått kast med molekyler. (Teller 20%)



Med oppsettet i figuren ovenfor kan en tenke seg å måle hastighetsfordelingen til molekyler i en gass. Anta at et molekyl som slipper ut gjennom det lille hullet i beholderens vegg, har hastighet $\boldsymbol{v}$ i xy-planet, slik at $\boldsymbol{v}$ danner vinkelen α med horisontalen, dvs x-aksen. I avstand $x_1 = L/2$ og $x_2 = L$ fra beholderveggen har vi plassert to skjermer, med små hull i høyde hhv y_1 og y_2 (målt i forhold til starthøyden $y = 0$). Siden molekylet faller i tyngdefeltet, vil det passere gjennom begge disse hullene dersom det hadde en bestemt fart $v = |\boldsymbol{v}|$ og en bestemt utgangsretning α da det slapp ut av beholderen, fra posisjonen $(x, y) = (0, 0)$. Ved å variere y_1 og y_2 og telle antall molekyler som slipper gjennom, kunne vi således bestemme hastighetsfordelingen til molekylene inne i beholderen.

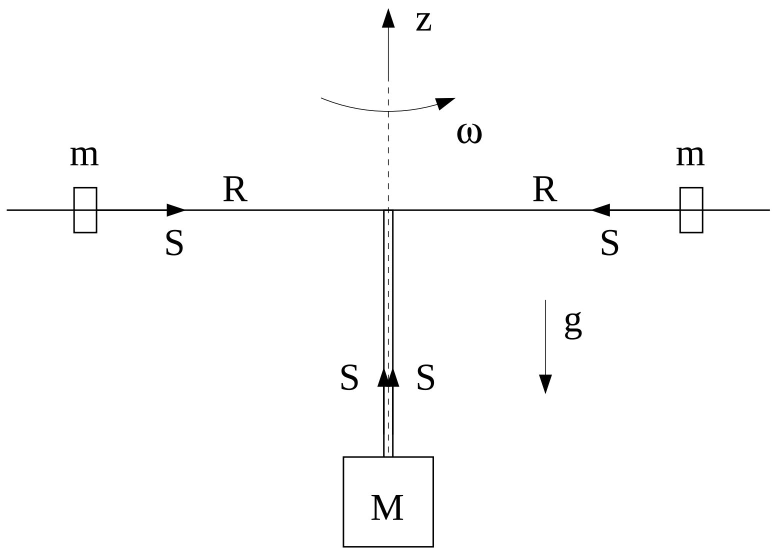
<u>a</u>. For gitt y_1, y_2 og L, vis at molekyler som passerer gjennom hullet i begge de to skjermene, kom ut av beholderen i en retning gitt ved

$$\tan\alpha = \frac{4y_1 - y_2}{L}.$$

For gitt verdi av y_1, hva er mulige verdier av y_2?

<u>b</u>. Finn et uttrykk for den tilhørende verdien av v (uttrykt ved g, y_1, y_2 og L).

Oppgave 3. Roterende masser. (Teller 25%)



I oppsettet til venstre kan de to massene m gli friksjonsfritt på en masseløs horisontal stang. Massen M er forbundet med de to massene m ved hjelp av to like lange masseløse snorer. De to massene m befinner seg begge i avstand R fra z-aksen (angitt med stiplet linje). Hele systemet kan rotere omkring z-aksen. Vi betrakter alle de tre massene som punktmasser, i hele denne oppgaven.

a. Vis at systemets vinkelhastighet må være

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg}{2mR}}$$

for at avstanden R fra rotasjonsaksen til de to massene m skal holde seg konstant. Tips: Snordraget i de to snorene holder de to massene m i uniform sirkelbevegelse og balanserer samtidig tyngden til M.

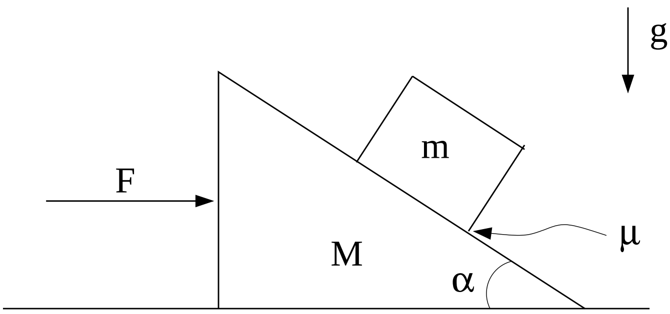
b. Systemet settes nå i rotasjonsbevegelse ved tidspunktet $t = 0$, med initiell vinkelhastighet ω_0 og avstand R_0 fra z-aksen ut til hver av de to massene m. Anta at initialbetingelsene ikke oppfyller den dynamiske likevektsbetingelsen funnet i punkt **a**. Dermed vil R endre seg med tiden. Vis at differensialligningen som bestemmer $R(t)$ kan skrives på formen

$$\ddot{R} + \alpha\, g - \frac{\beta}{R^3} = 0,$$

og fastlegg derved koeffisientene α og β. Tips: Dreieimpulsbevarelse. Posisjonen y til massen M endrer seg på samme måte som R, ettersom snorenes lengde ikke endrer seg. Merk at den radielle akselerasjonen til massene m (med positivt fortegn radielt utover) nå blir $\ddot{R} - \omega^2 R$, siden R ikke lenger er konstant.

c. Differensialligningen gitt i punkt **b**, med initialbetingelser $R(0) = R_0$ og $\dot{R}(0) = 0$, har ingen enkel analytisk løsning. Den kan imidlertid løses numerisk, med enkle metoder. Skisser en numerisk algoritme (oppskrift) som løser differensialligningen i punkt **b**. Tips: Diskretiser tidsaksen i like store intervaller Δt, og lag en algoritme der posisjonen R_j og (den radielle) hastigheten $V_j = \dot{R}_j$ ved tidspunktet $t_j = j \cdot \Delta t$ beregnes med utgangspunkt i de tilsvarende størrelsene ved foregående tidspunkt, $t_{j-1} = (j-1) \cdot \Delta t$. (Det er ikke nødvendig å skrive algoritmen i et bestemt programmeringsspråk, som Matlab. Såkalt "pseudokode" er helt i orden.)

Oppgave 4. Klosser og skråplan. (Teller 20%)



En rektangulær kloss med masse m ligger på en trekantet kloss med masse M, som vist i figuren til venstre. Det resulterende skråplanet, som m ligger på, danner vinkelen α med horisontalen. Vi antar i hele oppgaven at det ikke er friksjon mellom det horisontale underlaget og den trekantede klossen. For flaten mellom de to klossene skal vi studere tilfellene både uten og med (statisk) friksjon. Dette spesifiseres nærmere nedenfor.

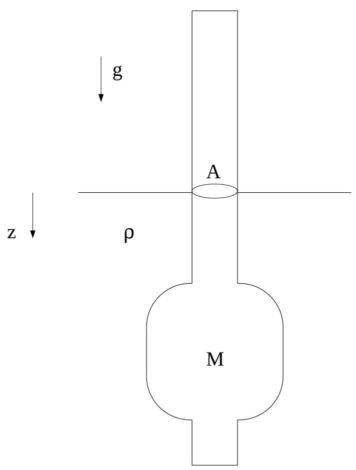
a. Anta først at det ikke er friksjon mellom de to klossene, dvs $\mu = 0$. Vis at kraften F_0 som vi da må dytte fra venstre på den trekantede klossen med for at den rektangulære klossen ikke skal gli på skråplanet, er

$$F_0 = (M + m)\, g \, \tan \alpha.$$

Vurder om F_0 avhenger av M, m og α på fornuftig vis.

b. Vi antar deretter at det er litt friksjon mellom de to klossene, slik at den statiske friksjonskoeffisienten μ er litt større enn null (men tilstrekkelig liten til at m ville gli nedover skråplanet dersom vi ikke dyttet fra venstre med en kraft F). I hvilket intervall $(F_{\min}, F_{\max})$ må F ligge for at m ikke skal gli nedover eller oppover skråplanet? Kontroller at $F_{\min} \to F_0$ og $F_{\max} \to F_0$ i grensen $\mu \to 0$.

Oppgave 5. Harmonisk oscillator. (Teller 10%)



Figuren til venstre viser et hydrometer med masse M som flyter i en væske med masse ρ pr volumenhet (dvs massetetthet ρ). Hydrometeret er tyngst nederst, slik at det holdes vertikalt, som i figuren. I likevekt balanseres tyngden av hydrometeret av den såkalte oppdriften (Arkimedes' lov), og væskeoverflaten når da opp til en posisjon på hydrometeret som vi velger som $z = 0$. Her har hydrometeret et uniformt tverrsnitt med areal A. Dersom hydrometeret nå forskyves litt fra likevekt, f.eks. ved at vi dytter det litt lenger ned i væsken, vil endringen i oppdriften gi en nettokraft på hydrometeret, med retning tilbake mot likevektsposisjonen. Denne nettokraften, F, er lik tyngden av endringen i fortrengt væske, og dermed proporsjonal med utsvinget z fra likevekt. Men med en nettokraft F proporsjonal med utsvinget z har vi, pr definisjon, en enkel harmonisk oscillator, dvs hydrometeret vil svinge harmonisk opp og ned omkring likevektsposisjonen $z = 0$, med en karakteristisk vinkelfrekvens ω og svingeperiode $T = 2\pi/\omega$. Bruk Newtons 2. lov til å finne differensialligningen som bestemmer hydrometerets bevegelse $z(t)$, og fastlegg på den måten ω og T.

FORMLER.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Newtons andre lov: $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{r}}$

Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Arbeid: $dW = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$

Friksjon, statisk: $f \le \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$

Luftmotstand (liten v): $\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{v}$ Luftmotstand (stor v): $\boldsymbol{f} = -bv^2\hat{v}$

Tyngdepunkt (Massesenter): $\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i \boldsymbol{r_i} m_i \to \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r}\cdot dm$

Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = -v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r\,d\omega/dt$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{F}$ Statisk likevekt: $\Sigma\boldsymbol{F}_i = 0 \quad \Sigma\boldsymbol{\tau}_i = 0$

Dreieimpuls: $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$

Stive legemer, sylindersymmetri mhp rotasjonsaksen: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_b + \boldsymbol{L}_s = (\boldsymbol{R}_{CM} - \boldsymbol{r}_0)\times M\boldsymbol{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$

Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2 dm$

Steiners sats (parallellakseteoremet): $I = I_0 + Md^2$

Gravitasjon: $\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \quad U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m \quad V(r) = U(r)/m$

Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad T = 2\pi/\omega \qquad f = 1/T = \omega/2\pi$

Masse i fjær: $\omega = \sqrt{k/m}$ Fysisk pendel: $\omega = \sqrt{mgd/I}$ Matematisk pendel: $\omega = \sqrt{g/L}$

Dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Underkritisk demping ($\gamma = b/2m$, $\omega_0^2 = k/m$): $x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Overkritisk demping: $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t} \qquad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\cos\omega t$

(partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$

amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \qquad \omega_0^2 = k/m$

Kraft $\boldsymbol{F}$ målt i koordinatsystem S som roterer med vinkelfrekvens $\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F'} + m\omega^2\boldsymbol{\rho'} + 2m\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}$

($\boldsymbol{F'}$ er kraft målt i inertialsystemet S', $\boldsymbol{\rho}$' er avstand fra rotasjonsaksen, $\boldsymbol{u}$ er hastighet målt i S.)

Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q}{\partial a_i}\,\Delta a_i\right)^2$

Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right)}$

Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\overline{x}} = \delta_x/\sqrt{N}$