Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i

TFY4145 MEKANISK FYSIKK
FY1001 MEKANISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk v/Arne Mikkelsen,
Tlf.: 486 05 392 / 7359 3433

Eksamensdato: Mandag 16. desember 2013
Eksamenstid: 09:00 - 13:00
Tillatte hjelpemidler (kode C):

Bestemt enkel godkjent kalkulator.
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelark.

Annen informasjon:

1. Denne eksamen teller 90 % på endelig karakter, laboratorierapport 10 %. For studenter med laboratorium godkjent 2011 og før teller denne eksamen 100 %.

2. Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen.

3. Noen generelle faglige merknader:
   - Se bort fra luftmotstand med mindre det er spesielt nevnt at luftmotstand skal tas hensyn til.
   - Se bort fra rullemotstand ved rein rulling, dvs. ingen energitap pga. rulling.
   - Symboler er angitt i kursiv (f.eks. m for masse), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. m for meter).
   - $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{r}}$ og $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y-, z-, r- og θ-retning.
   - Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

4. I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**
Svar på flervalgsspørsmål i oppgave 1 skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende den følgende:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Mitt svar:											

5. Oppgavene er utarbeidet av Arne Mikkelsen og vurdert av Tor Nordam.

Målform/språk: Bokmål.
Antall sider (uten denne framsida): 5.
Antall sider vedlegg: 2.

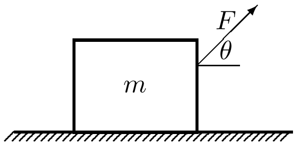
Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1. **Flervalgsspørsmål (teller 30 %)**

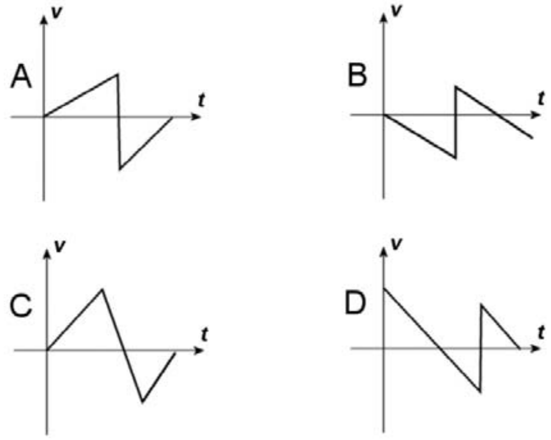
a. En kloss med masse m blir trukket med konstant hastighet av ei kraft i retning θ med horisontalen, som vist på figuren. Den kinetiske friksjonskoeffisienten mellom den ru overflata og klossen er μ_k. Størrelsen til friksjonskrafta er

A) $\mu_\mathrm{k} mg$
B) $\mu_\mathrm{k} F\cos\theta$
C) $\mu_\mathrm{k} F\sin\theta$
D) $\mu_\mathrm{k}(mg - F\sin\theta)$
E) Ingen av disse er rett svar



b. En ball slippes og faller mot golvet. Vi ser bort fra luftmotstanden. Hvilken kurve beskriver best ballens fart fra den slippes til den treffer golvet for **andre** gang?

A) A
B) B
C) C
D) D
E) Ingen av kurvene.



c. Hvis vi skalerer alle dimensjoner til et legeme med en faktor a vil volumet og massen bli multiplisert med a^3. Med hvilken faktor vil treghetsmomentet bli multiplisert?

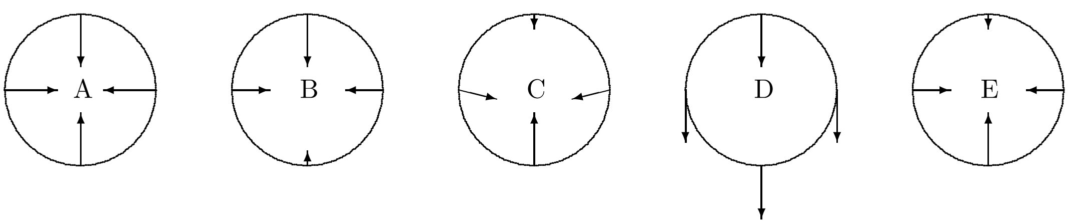
A) a^2
B) a^3
C) a^4
D) a^5
E) a^6.

d. En kloss med masse $2m$ kolliderer fullstendig uelastisk med en kloss med masse $3m$. Før kollisjonen har klossen med masse $2m$ hastighet v_0 mens klossen med masse $3m$ ligger i ro. Etter kollisjonen har klossene felles hastighet v. Hvor mye mekanisk energi har gått tapt i kollisjonen?

A) $\frac{1}{3}mv_0^2$
B) $\frac{2}{5}mv_0^2$
C) $\frac{3}{5}mv_0^2$
D) $\frac{1}{3}mv_0^2$
E) mv_0^2

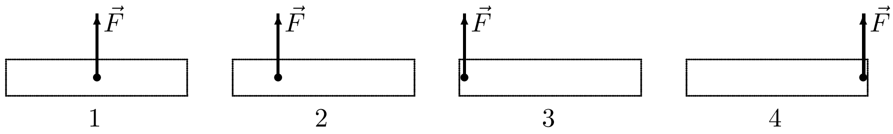
e. Ei vogn har stor nok hastighet til å fullføre en vertikaltstilt sirkelformet "loop" i tyngdefeltet. Hvilken figur viser riktige akselerasjonsvektorer på de fire stedene på loopen (nederst, øverst, venstre og høyre)? Se bort fra friksjon.

A) A
B) B
C) C
D) D
E) E



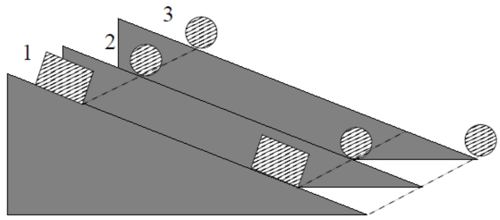
f. Figuren viser fire like staver som utsettes for samme ytre kraft $\vec{F}$, men med ulike angrepspunkt. Ingen andre krefter virker på staven. Hva kan du da si om akselerasjonen $a_i = |\vec{a}_i|$ til massesenteret til stav nr i?

A) $a_1 > a_2 > a_3 = a_4 \neq 0$
B) $a_1 < a_2 < a_3 = a_4$
C) $a_1 = a_2 > a_3 = a_4$
D) $a_1 > a_2, \ a_3 = a_4 = 0$
E) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$



g. Figuren illustrerer en kloss (legeme 1) og to sylindersymmetriske legemer (2 og 3) på identiske skråplan. De tre legemene har lik masse men 2 og 3 har ulike treghetsmoment. Klossen glir på skråplanet, 2 og 3 ruller uten å gli eller slure. Vi ser bort fra rullemotstand, dvs. ingen energitap pga. rulling. De tre slippes samtidig fra samme høyde på skråplanet, med null starthastighet. Litt senere har den ene sylinderen (3) nådd bunnen av skråplanet. Klossen og den andre sylinderen har nå kommet like langt men har fortsatt et stykke igjen til bunnen. Ranger friksjonskreftene f_1, f_2 og f_3 som virker fra skråplanet på henholdsvis legeme 1, 2 og 3.

A) $f_1 = f_2 > f_3$
B) $f_2 < f_1 < f_3$
C) $f_1 > f_2 > f_3$
D) $f_1 = f_2 < f_3$
D) $f_1 > f_2 = f_3$
(Siste D) skal være E), oppgitt på eksamen)



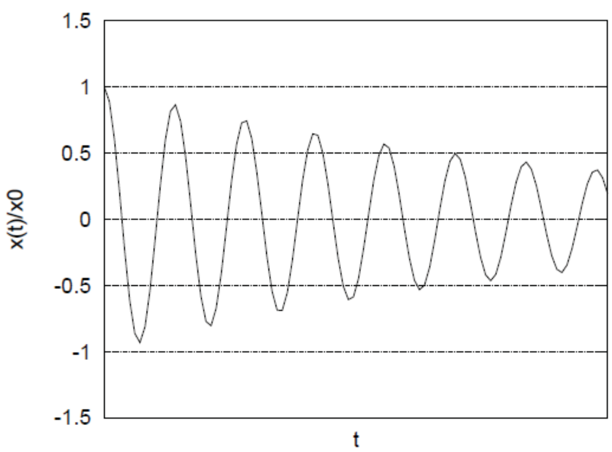
h. Gravitasjonskrafta på en kommunikasjonssatellitt som kretser i en geostasjonær sirkulær bane rundt jorda over ekvator vil ha et kraftmoment om jordas sentrum som er

A) retta fra satellitten mot jorda
B) retta parallelt med jordas akse og mot nordpolen.
C) retta parallelt med jordas akse og mot sørpolen.
D) retta fra jorda mot satellitten.
E) lik null.

i. En satellitt med masse m går i en stabil sirkulær bane med radius R rundt en planet med masse M. Den universelle gravitasjonskonstanten er G og gravitasjonens potensielle energi har referanse (er lik null) i uendelig stor avstand. Forholdet mellom satellittens potensielle energi og dens kinetiske energi er
A) -4
B) -2
C) 1
D) G/R
E) $2G/R$

j. Figuren viser utsvinget $x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos \omega t$, eller rettere sagt $x(t)/x_0$, for ei dempa harmonisk svingning. Omtrent hvor stort er forholdet mellom vinkelfrekvensen ω og dempningskonstanten γ? (Tall på tidsaksen t trengs ikke oppgis for å løse oppgaven.)

A) $\omega/\gamma = 0,022$
B) $\omega/\gamma = 7,2$
C) $\omega/\gamma = 14$
D) $\omega/\gamma = 45$
E) $\omega/\gamma = \infty$

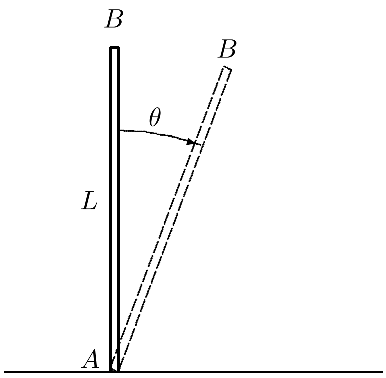


k. Matlabkoden til høyre leser, fra fila legeme.txt, sammenhørende verdier for tid (t) og kartesiske koordinater (x, y) for et legeme som følger en sirkulær bane. Legemets masse er satt til 1. Hvilken fysisk størrelse representerer E i programmet?

A) Banefart
B) Bevegelsesmengde
C) Kinetisk energi
D) Spinn
E) Sentripetalakselerasjon

```
[t,x,y]=textread('legeme.txt','%f %f %f');
N=length(t);
A=zeros(1,N);
B=zeros(1,N);
for i=2:N-1
A(i)=(x(i+1)-x(i-1))/(t(i+1)-t(i-1));
B(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(t(i+1)-t(i-1));
C(i)=A(i)*A(i)+B(i)*B(i);
D(i)=sqrt(x(i)*x(i)+y(i)*y(i));
E(i)=sqrt(C(i))*D(i);
end
```

Oppgave 2. Fallende stang. (teller 21 %)



Ei tynn, rett, homogen stang AB med masse M og lengde L står vertikalt på et plant, horisontalt underlag. Stanga utsettes for en liten forstyrrelse slik at den begynner å falle. Forstyrrelsen er så liten at vi antar at stangas kinetiske energi initielt er null i fallbevegelsen. Anta at friksjonskrafta mot underlaget er stor nok til å hindre at stanga glir, for enhver vinkel $0 < \theta < 90°$ med vertikalretningen. Stanga roterer derfor om et fast punkt A med treghetsmoment $I = \frac{1}{3}ML^2$. Tyngdens akselerasjon er g.

a. Tegn inn alle krefter som virker på stanga i stilling θ.

b. Bruk Newtons 2. lov for rotasjon (spinnsatsen) til å finne stangas vinkelakselerasjon, α, om punktet A, uttrykt med g, L og θ.

c. Bruk energibetraktning til å finne uttrykk for stangas vinkelhastighet $\omega = \dot{\theta}$ om punktet A. Uttrykk svaret med g, L og θ. TIPS: Kinetisk energi utgjøres kun av rotasjonsenergi om A.

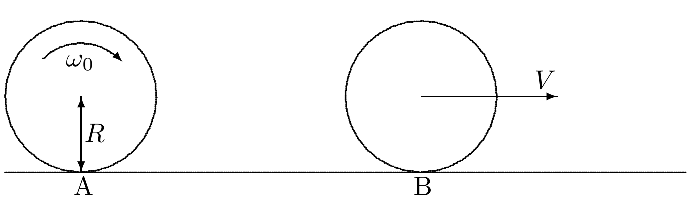
d. Akselerasjonen til stangas massesenter kan uttrykkes

$$\vec{a} \;=\; a_\theta \, \hat{\boldsymbol{\theta}} + a_r \, \hat{\mathbf{r}} = \frac{3g}{4} \sin\theta \; \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{3g}{2}(1 - \cos\theta) \; \hat{\mathbf{r}} \, .$$

Finn normalkrafta $F_{\rm N}$ fra underlaget og friksjonskrafta $F_{\rm f}$ like før stanga treffer golvet, dvs. når $\theta = 90°$. Angi retning for $F_{\rm f}$.

Oppgave 3. Spinning, rulling og kollisjon (teller 17 %)

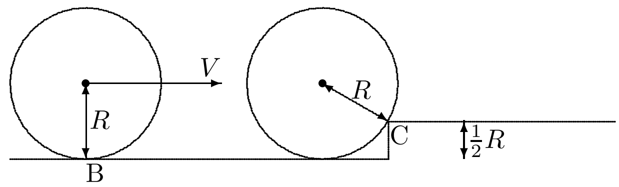
En massiv, homogen sylinder med masse M, radius R og treghetsmoment $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ blir plassert på et horisontalt underlag ved et punkt A mens den roterer med vinkelhastighet ω_0 om sylinderaksen. Den settes forsiktig ned slik at massesenteret (CM) har null translasjonshastighet, dvs. $v_0 = 0$. Kinetisk og statisk friksjonskoeffisient mellom sylinderen og underlaget er μ, tyngdens akselerasjon er g. Etter at sylinderen er satt ned, beveger den seg langs underlaget og vil ved et visst punkt B ha oppnådd rein rullebevegelse.



<u>**a.**</u> Vi betrakter spinn og kraftmoment om punktet A på underlaget. Forklar hvorfor sylinderens spinn om A er bevart under bevegelsen og bruk dette til å bestemme hastigheten V til sylinderens CM ved punkt B der bevegelsen er en rein rullebevegelse. Uttrykk V med de oppgitte størrelsene.

<u>**b.**</u> Finn avstanden mellom A og B uttrykt ved de oppgitte størrelsene.

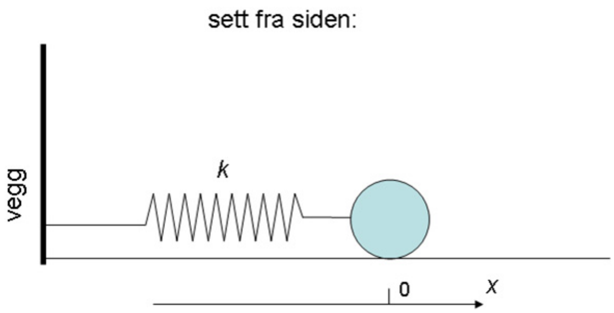
Etter rein rullebevegelse er oppnådd og sylinderen har hastighet V, treffer den en kant C med høyde $\frac{1}{2}R$, som vist i figuren. Vi regner støtet mot C som svært kortvarig. Videre antar vi at det ved kanten C er stor nok friksjon til at sylinderens bevegelse umiddelbart etter støtet vil være en rotasjon om kanten C.

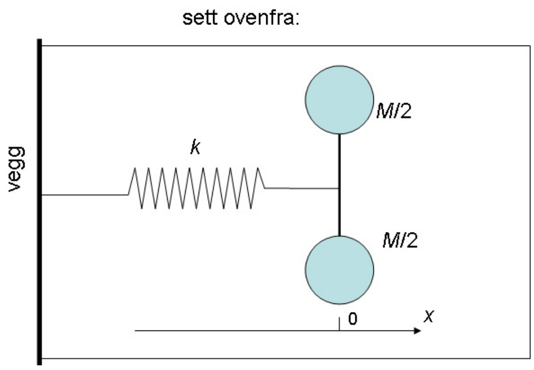


<u>**c.**</u> Forklar hvorfor sylinderens spinn om C er bevart under støtet og bruk dette til å finne hastigheten V' til sylinderens CM umiddelbart etter støtet, uttrykt med V, dvs finn x i $V' = xV$.

<u>Oppgave 4.</u> Svingesystem (teller 17 %)

Ei fjær med fjærkonstant $k = 200$ N/m er i ene enden festa til en vegg og andre enden festa midt på en aksling med to like kuler i hver ende av akslingen. Kulene er massive med samla masse $M = 2,00$ kg mens akslingen og fjæra kan regnes masseløse. Hver kule har radius $R = 5,0$ cm. Systemet med kulene og akslingen kan bevege seg på underlaget og det strammes opp til $x = x_0 = 0,100$ m og slippes slik at det svinger fram og tilbake om $x = 0$. Svingingen skjer uten å slenge til sidene eller å rotere om noen vertikal akse, dvs. bevegelse bare i x-retning. Når akslingen roterer skjer dette fritt uten hindring ved festet til fjæra.





Vi antar at det er tilstrekkelig friksjon mellom kulene og underlaget slik at kulene under bevegelsen ruller uten å skli.

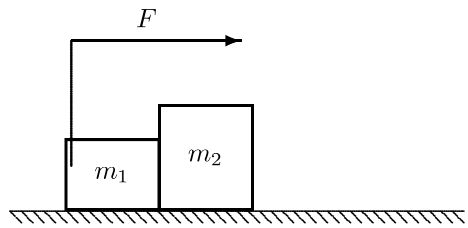
<u>**a.**</u> Tegn opp systemet sett fra siden i høyre ytterstilling ($x = x_0$) og tegn her inn fjærkraft F og friksjonskraft F_f på kulene, med angrepspunkt, retning og omtrent riktige størrelser relativt hverandre.

<u>**b.**</u> I høyre ytterstilling vil systemet ha akselerasjon a mot venstre. Vis at friksjonskrafta må ha størrelse (sett bort fra retning) $F_\mathrm{f} = \frac{2}{5}Ma$.

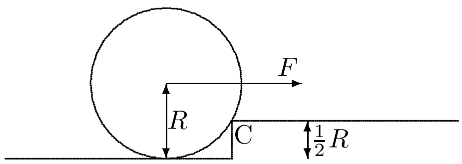
<u>**c.**</u> På grunnlag av Newtons 2. lov for translasjon, finn systemets bevegelseslikning. Gjenkjenn denne som en udempa harmonisk svinging og finn herfra svingetida T i sekunder.

Oppgave 5. Diverse (teller 15 %)

a.
To klosser med masser $m_1 = 1{,}00$ kg og $m_2 = 2{,}00$ kg er i kontakt med hverandre på eihorisontal overflate som vist i figuren. Ei horisontal kraft $F = 12{,}0$ N virker på m_1. Kinetisk friksjonskoeffisient og statisk friksjonskoeffisient mellom hver av klossene og underlaget er henholdsvis μ_k og μ_s. Bestem verdi av kontaktkrafta F_{12} mellom kloss 1 og 2 når $\mu_\mathrm{k} = \mu_\mathrm{s} = 0,30$ og tyngdens akselerasjon $g = 10,0\,\mathrm{m/s}^2$.

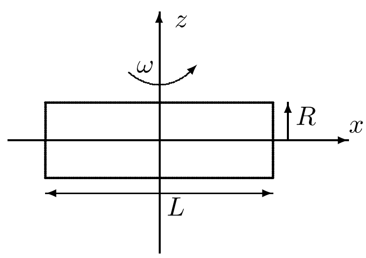


b.
En massiv, homogen sylinder med masse M, radius R og treghetsmoment $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ ligger i ro mot kanten C som vist i figuren. Hva er den minste krafta som må virke i sylinderens massesenter for at sylinderen skal løftes opp, uttrykt med M og g? Anta det er nok friksjon på kanten til at sylinderen ikke glir over denne.



c.
Beregn ved integrasjon treghetsmomentet I for en massiv sylinder m.h.p. rotasjon om en akse gjennom massesenter (CM) som står normalt på sylinderens symmetriakse. Uttrykk I med sylinderens lengde L, radius R og masse M.

TIPS:
Du kan dra nytte av parallellakseteoremet (Steiners sats) og at treghetsmomentet for ei sirkelplate med masse m og radius R mhp. rotasjon om en diagonal er $I_\mathrm{s} = \frac{1}{4}mR^2$.



Vedlegg: FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

Nødvendige konstanter hentes fra Angell & Lian: Fysiske størrelser og enheter.

$\vec{F}(\vec{r},t) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$, der $\vec{p}(\vec{r},t) = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ $\quad \vec{F} = m\vec{a}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)$

Arbeid $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \quad W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

Kinetisk energi $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ Potensiell energi $E_\mathrm{p}(\vec{r})$, tyngde: $E_\mathrm{p}(h) = mgh$, fjær: $E_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_\mathrm{p}(\vec{r}) +$ friksjonsarbeide = konstant

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_\mathrm{p}(\vec{r})$ Éndim: $F_x = -\frac{\partial}{\partial x}E_\mathrm{p}(x,y,z)$ f.eks. Hookes lov (fjær): $F_x = -kx$

Tørr friksjon: Statisk: $|F_\mathrm{f}| \le \mu_\mathrm{s} F_\perp$, kinetisk: $|F_\mathrm{f}| = \mu_\mathrm{k} F_\perp$

Våt friksjon (luft/vann): $\vec{F}_\mathrm{f} = -k_\mathrm{f}\vec{v}$ (liten v) $\quad \vec{F}_\mathrm{f} = -bv^2\hat{v}$ (stor v)

Massefellespunkt: $\vec{r}_\mathrm{cm} = \frac{1}{M}\sum_i \vec{r}_i m_i \to \frac{1}{M}\int \vec{r}\cdot\mathrm{d}m \qquad M = \sum m_i$

Kraftimpuls: $\int_{\Delta t}\vec{F}(t)\mathrm{d}t = m\Delta\vec{v}$ Alle støt: $\sum\vec{p}_i =$ konstant Elastisk støt: $\sum E_{\mathrm{k},i} =$ konstant

Vinkelhastighet $\vec{\omega} = \omega\,\hat{\omega} \quad |\,\vec{\omega}\,| = \omega = \dot{\theta}$ Vinkelakselerasjon $\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \quad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \ddot{\theta}$

Konstant $\vec{\alpha}$: $\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\cdot(\theta-\theta_0)$

Sirkelbev.: $v = r\omega$ Sentripetalaks.: $\vec{a}_\mathrm{c} = -v\omega\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}} = -r\omega^2\,\hat{\mathbf{r}}$ Baneaks.: $a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\,\alpha$

Kraftmoment (dreiemoment) om origo: $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$ Arbeid: $\mathrm{d}W = \tau\mathrm{d}\theta$

Betingelser for statisk likevekt: $\Sigma\vec{F}_i = \vec{0} \quad \Sigma\vec{\tau}_i = \vec{0}$, uansett valg av referansepunkt for $\vec{\tau}_i$

Spinn (dreieimpuls) og spinnsatsen: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} \quad \vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}$ Stive legemer: $\vec{L} = I\cdot\vec{\omega} \quad \vec{\tau} = I\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$
der treghetsmoment $I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum m_i r_i^2 \to \int r^2\mathrm{d}m$ med r = avstanden fra m_i ($\mathrm{d}m$) til rotasjonsaksen.

Rotasjonsenergi: $E_\mathrm{k,rot} = \frac{1}{2}I\,\omega^2$,

Med rotasjonsaksen gjennom massemiddelpunktet: $I \to I_0$, og da gjelder:
massiv kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$ kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$ sylinder/skive: $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$
åpen sylinder/ring: $I_0 = MR^2$ lang, tynn stav: $I_0 = \frac{1}{12}M\ell^2$

Parallellakseteoremet (Steiners sats): $I = I_0 + Md^2$

Legemer som har translasjon og rotasjon: $\vec{L} = \vec{R}_\mathrm{cm}\times M\vec{V} + I_0\vec{\omega}$, $\quad E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\,\omega^2$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad E_{\rm p}(r) = -G\frac{M}{r}m$

Udempa svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Tyngdependel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$, der $\sin\theta \approx \theta$ Fysisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ Matematisk: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Dempa svingning: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m} \qquad \gamma = b/(2m)$

$\gamma < \omega_0$ Underkritisk dempa: $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_{\rm d} t + \phi)$ med $\omega_{\rm d} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\gamma > \omega_0$ Overkritisk dempa: $x(t) = A^{+}\mathrm{e}^{-\alpha^{(+)}t} + A^{-}\mathrm{e}^{-\alpha^{(-)}t}$ med $\alpha^{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

eller $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cosh(\beta t + \phi)$ med $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungen svingning: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$, med (partikulær)løsning når $t \gg \gamma^{-1}$:

$$x(t) = A_0\cos(\omega t - \delta), \quad \text{der} \quad A_0(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad \tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

"Rakettlikningen": $m(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\rm Y} + \beta\vec{u}_{\rm ex}$ der $\beta = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ og $\vec{u}_{\rm ex}$ = utskutt masses hastighet relativ hovedmasse

Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q}{\partial a_i}\,\Delta a_i\right)^2$

Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right)}$

Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\overline{x}} = \frac{\delta_x}{\sqrt{N}}$