Institutt for fysikk 2006 **TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk**

Kont.eksamen 16. aug. 2007. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g
Rett svar:	A	A	E	D	A	D	B

Detaljer om spørsmålene:

a. A. Arbeid = tap i kinetisk energi: $Fs = \frac{1}{2}mv^2$, som gir $F = mv^2/(2s) = 47{,}3$ kN.

b. A. Maks statisk friksjonskraft $F_{\mathrm{f,s}} = mg\mu_{\mathrm{s}} = 250$ N. Maks kinematisk friksjonskraft $F_{\mathrm{f,k}} = mg\mu_{\mathrm{k}} = 175$ N. Trekkrafta 200 N er større enn $F_{\mathrm{f,k}}$, men mindre enn $F_{\mathrm{f,s}}$. Den statiske friksjonskrafta holder derfor klossen fortsatt i ro.

c. E. $\vec{r}\|\vec{F}$ slik at kraftmomentet $\vec{r}\times\vec{F} = \vec{0}$.

d. D. Translasjonsfarten $v = \omega R$ er gitt ved energibevarelse: $Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}v^2(IR^{-2} + M)$. En sylinder har større treghetsmoment enn kuler: $I_{\mathrm{syl}} = \frac{1}{2}MR^2$, $I_{\mathrm{kule}} = \frac{2}{5}MR^2$. Da blir v minst for sylinderen ved bunnen.

e. A. Kraftmomentbalanse om bjelkens venstre punkt: $F\cdot\sin 30^\circ \cdot L = 50\,\mathrm{N}\cdot L/2 + 150\,\mathrm{N}\cdot L$ gir svaret.

f. D. y-komponenten er $A\sin\theta$ til radiusvektor A, slik at alle uten C og D umiddelbart kan utelukkes. Når rotasjonsfrekvensen er f er $\theta = \omega t = 2\pi f t$.

g. B. Akselerasjon $a = F/m$ der F er fjærkrafta. Denne er minst når utslaget er minst, som det er i posisjon 2.

Oppgave 2.

a. Snorkrafta S og friksjonskrafta F_{f} virker begge horisontalt, definer positiv retning for F_{f} samme retning som S. Med translasjonsakselerasjon a og rotasjonsakselerasjon α er Newtons 2. lov for translasjon og for rotasjon:

$$\text{N-2 translasjon:} \quad Ma = S + F_{\mathrm{f}} \tag{1}$$

$$\text{N-2 rotasjon:} \quad I\alpha = \tau = Sr - F_{\mathrm{f}}R \tag{2}$$

Ved rein rulling er $\underline{\alpha = a/R}$.

b. Vi har 2 likninger (1) og (2) og to ukjente: a og F_{f}. Vi trenger uttrykk for treghetsmomentet som for sylinder er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Innsatt dette uttrykket og $\alpha = a/R$ i (2) gir:

$$\frac{1}{2}MR^2 a/R = Sr - F_{\mathrm{f}}R \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}Ma = S\frac{r}{R} - F_{\mathrm{f}} \tag{3}$$

Vi finner først a ved å eliminere F_{f} fra (3):

$$F_{\mathrm{f}} = S\frac{r}{R} - \frac{1}{2}Ma, \tag{4}$$

og sette denne inn i (1). Dette gir

$$Ma = S + S\frac{r}{R} - \frac{1}{2}Ma \qquad \Rightarrow \qquad \underline{a = \frac{S}{M}\frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)}. \tag{5}$$

c. Den andre ukjente F_{f} finner vi ved å sette a inn i likn. (4):

$$F_{\mathrm{f}} = S\frac{r}{R} - \frac{1}{2}M\frac{S}{M}\frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = S\frac{r}{R} - S\frac{1}{3} - S\frac{1}{3}\frac{r}{R} = \underline{S\frac{2}{3}\left(\frac{r}{R} - \frac{1}{2}\right)}. \tag{6}$$

Resultatet viser at når $r/R > \frac{1}{2}$ er F_{f} positiv, dvs. mot høyre, for $r/R < \frac{1}{2}$ går F_{f} mot venstre.

Oppgave 3.

a. I tillegg til kreftene tegnet på figuren i oppgaven virker tyngdekrafta Mg rett nedover midt på stanga. Likevekt i x- og y-retning gir

$$F_y = Mg \qquad \text{og} \qquad F_x = F_s$$

Videre har vi rotasjonslikevekt om punktet B:

$$Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\theta_0 = F_\mathrm{s} \cdot L\cos\theta_0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{F_\mathrm{s} = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan\theta_0}\,.$$

Da har vi bestemt F_s, og ergo blir

$$\underline{F_x = F_\mathrm{s} = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan\theta_0} \qquad \text{og} \qquad \underline{F_y = Mg}\,.$$

b. Fordi F_x utgjøres kun av friksjonen, må $F_x = \mu_\mathrm{s} F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{s} F_y = \mu_\mathrm{s} Mg$. Sammen med uttrykket for F_x over får vi da

$$\mu_\mathrm{s} Mg = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan\theta_0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\mu_\mathrm{s}} = \frac{\tan\theta_0}{2} = \frac{\tan 30^\circ}{2} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}} = \underline{0,289}\,.$$

Dette er minste verdien μ_s kan ha for at stanga ikke skal skli.

c. Vi bruker Steiners sats (parallellakseteoremet) til å finne I om endepunktet, som er i avstand $\frac{L}{2}$ fra tyngdepunktet:

$$I = I_\mathrm{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}ML^2}\,.$$

Kan også integrere etter samme metode som i oppgave 4a, med $\mathrm{d}m = \mathrm{d}\ell \cdot M/L$:

$$I = \int_0^L \ell^2 \mathrm{d}\ell \cdot M/L = \frac{M}{L} \cdot \left[\frac{1}{3}\ell^3\right]_0^L = \underline{\frac{1}{3}ML^2}\,.$$

d. Newtons 2. lov for rotasjon:

$$\tau = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\theta = \frac{1}{3}ML^2 \cdot \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\alpha = \frac{g}{L} \cdot \frac{3}{2}\sin\theta}\,.$$

Bevegelsen kan sees på som rein rotasjon om B, slik at kin. energi er kun rotasjonsenergi $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}ML^2\,\omega^2$. Energi ved θ_0 lik energi ved vilkårlig θ:

$$Mg\,\frac{L}{2}\cos\theta_0 = \frac{1}{6}ML^2\,\omega^2 + Mg\,\frac{L}{2}\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \cos\theta\right)}}\,.$$

Man vil kunne verifisere ved derivasjon at $\dot{\omega} = \alpha$.

e. Umiddelbart etter snora er kutta er $\theta = \theta_0 = 30^\circ$ og vinkelakselerasjonen $\alpha = \frac{g}{L} \cdot \frac{3}{2}\sin\theta_0 \quad \left(= \frac{g}{L} \cdot \frac{3}{4}\right)$.

Da $\omega = 0$ har vi ingen sentripetalakselerasjon, tyngdepunktet har derfor følgende tangentialakselerasjon, dvs. normalt på staven:

$$a = \frac{L}{2}\,\alpha = g \cdot \frac{3}{4}\sin\theta_0 \quad \left(= g \cdot \frac{3}{8}\right)\,.$$

Denne akselerasjonen har komponent i henholdsvis x- og y-retning:

$$a_x = a\,\cos\theta_0 = g \cdot \frac{3}{4}\sin\theta_0\,\cos\theta_0 \quad \left(= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \qquad \text{og} \qquad a_y = -a\,\sin\theta_0 = -g \cdot \frac{3}{4}\sin^2\theta_0 \quad \left(= -g \cdot \frac{3}{16}\right)\,.$$

Endelig gir da Newton 2 for x- og y-retning:

$$Ma_x = F_x \quad \Rightarrow \quad F_x = Mg \cdot \frac{3}{4}\sin\theta_0\,\cos\theta_0 = Mg \cdot \frac{3}{16}\sqrt{3} = \underline{0,325 \cdot Mg} \tag{7}$$

$$Ma_y = F_y - Mg \quad \Rightarrow \quad F_y = Mg + Ma_y = Mg - Mg \cdot \frac{3}{4}\sin^2\theta_0 = Mg\left(1 - \frac{3}{16}\right) = \underline{0,813 \cdot Mg}\,. \tag{8}$$

Er friksjonskoeffisienten stor nok?

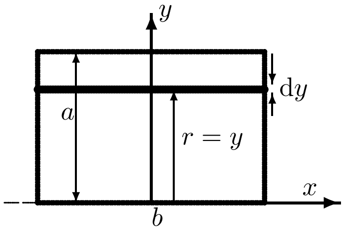
$$F_f = F_x \quad \text{og} \quad F_f = \mu_s |F_N| = \mu_s |F_y|$$

gir

$$\mu_s \geq \frac{F_x}{|F_y|} = \frac{0,325 \cdot Mg}{0,813 \cdot Mg} = 0,400\,,$$

som er større enn kravet over: $\mu_s = 0,289$, så staven vil gli når snora kuttes hvis $0,289 < \mu_s < 0,400$.

Oppgave 4.



a. Treghetsmomentet er (fra formelark) $I = \int r^2 \mathrm{d}m$, der r er avstand fra rotasjonsaksen for masseelement $\mathrm{d}m$ med høyde $\mathrm{d}y$. Legger inn et aksesystem x, y med x langs sidekant b og y langs sidekant a. Da er $r = y$ og $\mathrm{d}m = M \cdot \dfrac{b\,\mathrm{d}y}{ab}$ (andel av total masse). Dette gir:

$$I = \int_0^a y^2 M \cdot \frac{b\,\mathrm{d}y}{ab} = \int_0^a y^2 M \cdot \frac{b\,\mathrm{d}y}{ab} = M \cdot \frac{1}{a}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^a = \underline{\frac{1}{3}Ma^2}\,.$$

Innsatt tallverdier:

$$I = \frac{1}{3} \cdot 10,0\,\mathrm{kg} \cdot (0,10\,\mathrm{m})^2 = \underline{33 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}}\,.$$

b. Totalt kraftmoment er, med positiv retning mot klokka:

$$\tau = -F_2 \cdot R_2 + F_1 \cdot R_2 - F_3 \cdot R_1 = -4,13 \cdot 0,118\,\mathrm{Nm} + 5,88 \cdot 0,118\,\mathrm{Nm} - 2,12 \cdot 0,0493\,\mathrm{Nm} = 0,102\,\mathrm{Nm}$$

Angitt vinkel 30° har ingen betydning, det er vinkelen mellom krafta og armen som har betydning, og den er for alle lik 90°.

Treghetsmomentet for en sylinder er oppgitt på formelark:

$$I = \frac{1}{2}mR_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,92\,\mathrm{kg} \cdot (0,118\,\mathrm{m})^2 = 13,4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,,$$

og kraftmomentet gir vinkelakselerasjon ifølge spinnsatsen:

$$\tau = I\dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{\tau}{I} = \frac{0,102\,\mathrm{Nm}}{13,4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm^2}} = \underline{7,63\,\mathrm{s^{-2}}}\,.$$

Positiv, dvs. akselerasjon i positiv retning (mot klokka). Retningen for $\dot{\vec{\omega}}$ er da etter høyrehåndsregelen opp av papirplanet.

c. I stabil stasjonær bane er gravitasjonskraft lik sentripetalkraft:

$$-GmM/r^2 = -mv^2/r\,.$$

Dette gir

$$GmM/r = mv^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = 2 \cdot E_k\,,$$

og idet potensiell energi er gitt ved (se f.eks. formelsamling) $E_p = -GmM/r$, så er altså

$$\underline{E_p/E_k = -2}\,.$$

A Mikkelsen 17. aug. 2007