Institutt for fysikk 2007 **TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk**

Kont.eksamen TFY4145 6. aug. 08. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g
Rett svar:	E	B	C	D	A	A	E

Detaljer om spørsmålene:

a. E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover.

b. B. Hvis i bevegelse er $F_{\rm f} = \mu_{\rm k} \cdot F_N = 0,40 \cdot 100\,{\rm N} = 40\,{\rm N}$. Hvis i ro er $F_{\rm f} = \mu_{\rm s} \cdot F_N = 0,50 \cdot 100\,{\rm N} = 50\,{\rm N}$. Trekkrafta 60 N er større enn glidefriksjonen, slik at klossen beveger seg og $F_{\rm f} = 40\,N$.

c. C. Punktet A sin translasjonhastighet er $v_{\rm t}$ mot venstre. A's hastighet pga. rotasjonen er $v_{\rm r} = \omega r = v_{\rm t}$ i retning rett oppover. Vektorsummen blir $v\sqrt{2}$ i retning 45° framover (skrått mot venstre).

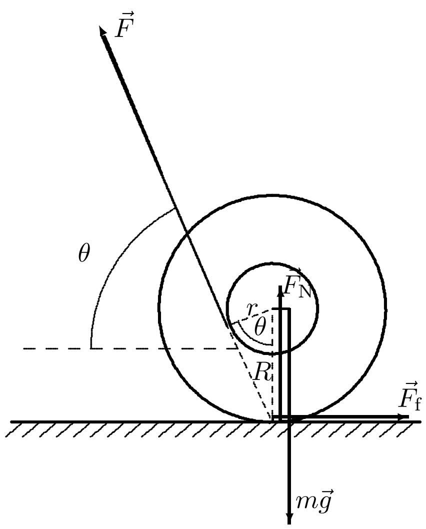
d. D. Kraftmomentet $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ vil etter høyrehåndsregelen falle langs $-x$.

e. A. Vinkelhastighet $\omega = v/R = 4,0\,{\rm s}^{-1}$. Treghetsmomentet for tynn ring er $I = mr^2 = 0,25\,{\rm kg\,m}^2$. Spinnet er da $L = I\omega = 1,00\ {\rm kg\,m^2s^{-1}}$.

f. A. Total energi = maks. pot. en. = $E_{\rm pot,max} = \frac{1}{2}kx^2_{\rm max}$. Når $x = x_{\rm max}/2$ blir $E_{\rm pot} = \frac{1}{2}k(x_{\rm max}/2)^2 = E_{\rm pot,max}/4$.

g. E. Kinetisk energi alltid positiv, derfor kan A, C og D forkastes. Hastigheten forandres harmonisk, derfor må $E_{\rm kin}$ også endres harmonisk, 5 er rett.

Oppgave 2. Rulling.



a. Kreftene er tyngden mg, normalkrafta fra underlaget $F_{\rm N}$, trekkrafta F, friksjonskrafta $F_{\rm f}$. Inntegnet i figuren. Angrepspunkt for $F_{\rm f}$ og $F_{\rm N}$ er i kontaktpunktet med underlag, mg i sentrum og F i tangentpunktet på indre sirkel.
$F_{\rm f}$ har alltid retning mot høyre. Om den ruller mot venstre eller høyre eller om den er i ro, er avhengig av om kraftmomentet for F eller $F_{\rm f}$ vinner.

b. Når jojoen ikke ruller eller sklir er summen av alle krefter i horisontal og vertikal retning lik null, samt at kraftmoment om enhver valgt akse er lik null. Det er her enklest å kreve at kraftmomentet om kontaktpunktet til bakken er lik null. Normalkrafta og friksjonskrafta virker i kontaktpunktet og har derfor null moment, tyngdekrafta har også null moment, slik at det bare er snorkrafta F som kan ha kraftmoment om kontaktpunktet. Skal denne også ha null kraftmoment må forlengelseslinja for snora gå gjennom kontaktpunktet. Dette er oppfylt når

$$\cos\theta = r/R \quad \text{altså} \quad \theta_0 = \underline{\arccos(r/R)}\,.$$

Alternativt kan du sette som krav null kraftmoment om tyngdepunktet

$$F_{\rm f}R - Fr = 0\,, \tag{1}$$

der $F_{\rm f}$ er friksjonskrafta. Newton 2 for translasjon i horisontal retning gir sammenhengen

$$\sum F_x = F_{\rm f} - F\cdot\cos\theta = 0 \quad\Rightarrow\quad F_{\rm f} = F\cdot\cos\theta \tag{2}$$

som sammen med likn. (1) gir

$$\cos\theta = F_{\rm f}/F = r/R\,. \tag{3}$$

Bruk av $F_{\rm f} = \mu F_{\rm N}$ i dette og/eller neste punkt er feil da friksjonen er statisk og mindre enn denne sin maksimale verdi.

c. Vi kaller tyngdepunktets hastighet v med positiv mot høyre og rotasjonshastigheten ω med positiv med klokka.

For rein rullebevegelse er $v = \omega R$ og $a = \alpha R$ der a er translasjonsakeselerasjon og α er vinkelakselerasjon. Vi definerer friksjonskrafta F_f som positiv mot høyre og anvender Newton 2 for translasjon i horisontal retning:

$$\sum F_x = Ma \quad \Rightarrow \quad -F\cdot\cos\theta + F_\mathrm{f} = Ma = MR\alpha \tag{4}$$

samt Newton 2 for rotasjon om tyngdepunktet:

$$Fr - F_\mathrm{f}R = I\alpha \tag{5}$$

Likn. (4) gir

$$F_\mathrm{f} = MR\alpha + F\cos\theta \tag{6}$$

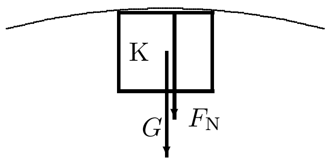
som igjen innsatt i likn. (5) gir

$$Fr - MR^2\alpha - FR\cos\theta = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{F}{I+MR^2}(r - R\cos\theta) = \frac{FR}{I+MR^2}\left(\frac{r}{R} - \cos\theta\right),$$

som skulle vises. Vi ser at jojoen er i ro ($\alpha = 0$) når $\cos\theta = r/R$, som funnet i a. Ser også at den ruller med klokka (mot høyre) når $\cos\theta < r/R$, dvs. $\theta > \theta_0$, og mot klokka (mot venstre) når $\cos\theta > r/R$, dvs. $\theta < \theta_0$. Uttrykk for F_f følger ved å sette dette uttrykket for α inn i likning (6). Man vil da finne at F_f alltid er positiv (mot høyre).

Oppgave 3. Loop

a. Kreftene som virker er kun tyngdekrafta og normalkraft fra underlaget, begge nedover.



b. Med $E_\mathrm{p} = 0$ på "golvnivå", dvs. ved A, gir bevaring av energi mellom bunnen A og toppen C:

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\cdot 2R + \frac{1}{2}mv_\mathrm{C}^2,$$

som gir løst v:

$$\underline{v_\mathrm{C} = \sqrt{v_0^2 - 4gR}}\,.$$

c. I B er normalkrafta lik sentripetalkraft: $F_{\mathrm{N,B}} = mv_\mathrm{B}^2/R$ og friksjonskrafta er dermed gitt som

$$\underline{F_{\mathrm{f,B}} = \mu_\mathrm{k}F_{\mathrm{N,B}} = \mu_\mathrm{k}mv_\mathrm{B}^2/R}\,.$$

d. Vi betraketer en posisjon "θ" i loopen der vinkelen er θ mellom posisjonen og bunnpunktet A. Vi skal bruke likning for energibevarelse mellom posisjon θ og $\theta + \mathrm{d}\theta$. Her inngår friksjonsarbeidet, og vi må finne normalkrafta for å finne friksjonen. I denne posisjonen er sentripetalakselerasjonen $a_\mathrm{c} = mv_2/R$, tyngdens komponent normalt på underlaget er $mg\cos\theta$ og Newton 2 i posisjon θ gir

$$mv^2/R = F_\mathrm{N} - mg\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad F_\mathrm{N} = mg\cos\theta + mv^2/R\,.$$

Da er friksjonsarbeidet ved en forflytning $\mathrm{d}\theta$ gitt ved

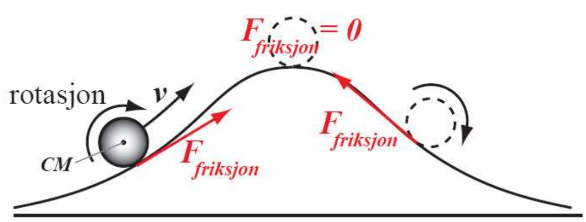
$$\mathrm{d}W_\mathrm{f} = \vec{F}_\mathrm{f}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\mu_\mathrm{k}F_\mathrm{N}\cdot R\,\mathrm{d}\theta = -\mu_\mathrm{k}\left(mg\cos\theta + mv^2/R\right)\cdot R\,\mathrm{d}\theta\,.$$

I posisjon θ er høyden gitt ved $h = R - R\cos\theta$ slik at høydeforskjell ved forflytning er $\mathrm{d}h = R\sin\theta\mathrm{d}\theta$. Energibalansen kan da settes opp:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E_\mathrm{p} + \mathrm{d}E_\mathrm{k} &= \mathrm{d}W_\mathrm{f} \\
\mathrm{d}(mgh) + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \mathrm{d}W_\mathrm{f} \\
mg\,\mathrm{d}h + mv\,\mathrm{d}v &= -\mu_\mathrm{k}\left(mg\cos\theta + mv^2/R\right)\cdot R\,\mathrm{d}\theta \\
gR\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + v\,\mathrm{d}v &= -\left(\mu_\mathrm{k}gR\cos\theta + \mu_\mathrm{k}v^2\right)\,\mathrm{d}\theta \\
\underline{v\,\mathrm{d}v} &= \underline{-\left(gR\sin\theta + \mu_\mathrm{k}gR\cos\theta + \mu_\mathrm{k}v^2\right)\,\mathrm{d}\theta}\,.
\end{aligned}$$

Oppgave 4. Diverse

a. Retningen til friksjonen fra underlaget på kula er markert med pilene i figuren. Rein rulling betyr ingen sluring mot underlaget og dermed er energien bevart. På veg oppover øker pot. energi og kin. energi avtar. Ved rulling er $v = \omega R$ (R = kuleradius) slik at både v og rotasjonshastigheten (vinkelhartigheten) ω avtar på veg oppover, dvs. negativ vinkelakselerasjon.



Ifølge spinnsatsen må det være et kraftmoment som gir denne vinkelakselerasjonen. Det er tre krefter som virker på kula; gravitasjonen, normalkrafta fra underlaget og friksjonen fra underlaget. Av disse er det kun friksjonskrafta som kan gi rotasjon om massemiddelpunktet. Friksjonen må sette opp et kraftmoment som virker mot rotasjonsbevegelsen på vei oppover, og det gir den retningen på friksjonskrafta som er indikert.

På veien nedover blir argumentasjonen som på veien opp, bare med motsatt fortegn, det vil si at friksjonskrafta må sette opp et kraftmoment som fører til raskere og raskere rotasjon. Friksjonskrafta må da virke som angitt i figuren. På toppen har ikke kula noe vinkelakselerasjon, det vil si at friksjonskrafta her er null (slik som for rein rulling på flatt underlag).

b. Grusen må motta et kraftstøt (en impuls) i horisontal retning for at den skal få en hastighet i denne retningen. Kraftstøtet er lik endring i bevegelsesmengde. Dersom vi betrakter en liten mengde grus, $\mathrm{d}m$, som faller ned på vogna i løpet av en tid $\mathrm{d}t$, må denne grusmengden (i gjennomsnitt i alle fall) få tilført et tilstrekkelig kraftstøt for å komme opp i hastigheten v_0. Dette horisontale kraftstøtet må grusen få fra en horisontal kraft fra underlaget i vogna, og for at toget ikke skal sakne på farta, må lokomotivet gi en drakraft like stor.

Impulsloven anvendt på den lille grusmengden i horisontal retning sier da:

$$F \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}m \cdot \Delta v = \mathrm{d}m \cdot v_0 \,.$$

Her er F horisontalkomponenten av den krafta som må virke på grusen med masse $\mathrm{d}m$ som faller ned på vogna i løpet av tida $\mathrm{d}t$. Hastighetsendringen horisontalt er v_0. Herav følger:

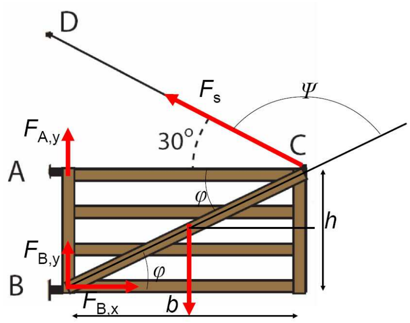
$$\underline{F = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot v_0 = k v_0} \,.$$

Energi: Lokomotivet drar med en ekstra kraft gitt ovenfor og med en hastighet v_0. Det betyr at lokomotivet må yte en ekstra effekt mens grusen faller, gitt ved:

$$P = F \cdot v_0 = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot v_0^2 = \underline{k v_0^2} \,.$$

c. Grinda roterer ikke, følgelig må kraftmomentet om enhver valgt akse være lik null. På grinda som system virker det fire krefter: Snordraget F_s i C, en vertikal kraft $F_{\mathrm{A,y}}$ i A, tyngden mg i tyngdpunktet og en ukjent kraft med komponenter $F_{\mathrm{B,x}}$ og $F_{\mathrm{B,y}}$ fra hengsel B. Kreftene er vist i figuren.

Vi velger hengsel B som akse for spinnsatsen fordi da får vi kun to krefter med moment: snordraget F_s og tyngden mg.



Med grindas lengde b, høyde h og diagonal $\sqrt{h^2+b^2}$ blir tyngdens effektive arm $b/2$ og snordragets moment blir $F_\mathrm{s} \cdot \sqrt{h^2+b^2} \cdot \sin\psi$ (se figuren for forklaring av vinkelen ψ). Spinnsatsen gir

$$mg \cdot \frac{b}{2} = F_\mathrm{s}\sqrt{h^2+b^2}\sin\psi \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{s} = \frac{mgb}{2\sqrt{h^2+b^2}\sin\psi} \,.$$

Vi ser fra figuren at

$$\phi + 30^\circ + \psi = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \psi = 180^\circ - 30^\circ - 26,57^\circ = 123,4^\circ$$

siden $\phi = \arctan(h/b) = 26,57^\circ$. Da følger ved innsetting:

$$F_\mathrm{s} = \frac{mgb}{2\sqrt{h^2+b^2}\sin\psi} = \frac{40\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 4,0\,\mathrm{m}}{2\sqrt{(2,0)^2+(4,0)^2}\,\mathrm{m} \cdot \sin 123,4^\circ} = 210,2\,\mathrm{N} = \underline{210\,\mathrm{N}} \,.$$

A.Mi. 8. august 2008