Institutt for fysikk 2008 **TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk**

Eksamen 11. des. 2008. Løsningsforslag

Dette løsningsforslaget er spesielt fyldig med angitt alternative løsninger, slike som er brukt av flere studenter i eksamensbesvarelsen.

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Rett svar:	D	C	D	C	A	B	D	E	B	C	A

Detaljer om spørsmålene:

a. D. Klossen i ro: $\sum F = 0$ langs planet, som gir $F_\mathrm{f} = mg\sin\theta$, friksjonen holder akkurat igjen for tyngdens komponent langs planet. Friksjonen kan *maksimalt* være $\mu_\mathrm{s} mg\cos\theta$, som skjer rett før klossen begynner å gli. Siden klossen er langt fra å gli er $F_\mathrm{f} < \mu_\mathrm{s} mg\cos\theta$ og derfor ikke B rett.

b. C. Når $v = 0$ er $E_\mathrm{k} = 0$. Totalenergien $E_\mathrm{tot} = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k}$ gir da at $E_\mathrm{tot} = E_\mathrm{p}$. Tenk på f.eks. ei fjær.

c. D. Bevaring bev.mengde: $M_1 v = (M_1 + M_2)v'$ gir v' som oppgitt i D.

d. C. Treghetsmoment om transversal akse gjennom sentrum: $I_\mathrm{cm} = \frac{1}{12}mL^2$ (f.eks. fra formelark). Akse $\frac{1}{3}L$ fra den ene enden $= \frac{1}{2}L - \frac{1}{3}L = \frac{1}{6}L$ fra sentrum. Steiners sats gir treghetsmoment om denne aksen: $I = I_\mathrm{cm} + m\left(\frac{1}{6}L\right)^2 = m\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{36}\right)L^2 = m\frac{4}{36}L^2 = m\frac{1}{9}L^2$.

e. A. Uten friksjonstap blir akselerasjonsforløpet som for en kloss som sklir friksjonsfritt nedover. Denne vil ha $a = F_{||}/m = mg\sin\theta/m = g\sin\theta$. For rulling blir det en faktor < 1 foran uttrykket, men prop. med $\sin\theta$, som er best representert med kurve 1.
ELLER ANALYTISK BEREGNET: Akselerasjonen gitt ved $ma = mg\sin\theta - F_\mathrm{f}$. Ved rulling er friksjonen stor nok til å tilfredsstille $a = R\alpha$ og dermed gir spinnlikningen $F_\mathrm{f}R = I\alpha$ at $F_\mathrm{f} = I(a/R^2)$. Innsatt i likningen for a finner vi at $a = \dfrac{mg\sin\theta}{m + I/R^2}$, altså prop. med $\sin\theta$.

f. B. En kraft nedover ($-z$ retning) på akslingen med hjulet gir et kraftmoment $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$ som etter høyrehåndsregelen går i $+y$-retning. Ifølge spinnsaten endres $\vec{L}$ i samme retning som $\vec{\tau}$. Spinnet $\vec{L}$ går i retning $+x$, slik at akslingen med hjulet vil dreie i $+y$-retning.

g. D.

h. E. Må først finne S fra tauet: Kraftmomentbalanse om bjelkens venstre punkt: $S\cdot\sin 30^\circ\cdot L = 150\,\mathrm{N}\cdot L$ gir $S = 300$ N. Snorkraftas x-komponent er $S_x = S\cos 30^\circ$. $\sum F_x = 0$ gir at krafta på bjelken fra hengslingen er $F_x = S_x = S\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = 260$ N. y-komponenten av krafta fra hengslingen, F_y, er null idet $\sum F_y = F_y + S_y - G \equiv 0$ og $S_y = G$. Da er $|F| = F_x =$260 N.

i. B. Akselerasjonen er den andrederiverte av posisjonen: $a = \ddot{y}$. Andrederiverte av en sinuskurve er lik $-$sinus.

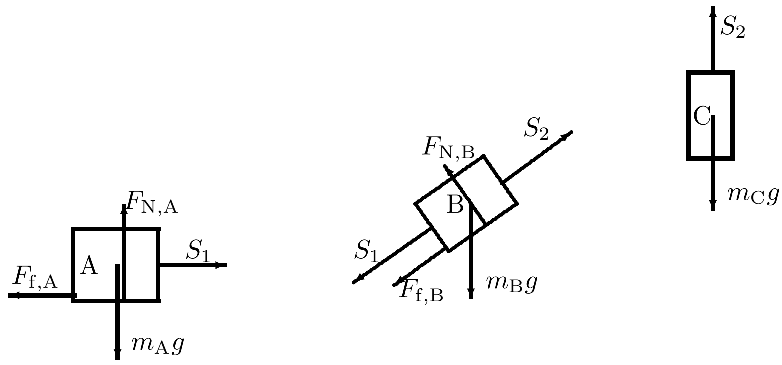
j. C. For harmonisk svingning er $a = -\omega^2 x(t)$, slik at her er vinkelhastigheten $\omega = 4,0\,\mathrm{s}^{-1}$. Da er perioden $T = 2\pi/\omega = 1,57$ s.

k. A. Total energi = maks. pot. en. = $E_\mathrm{pot,max} = \frac{1}{2}kx^2_\mathrm{max}$. Når $x = x_\mathrm{max}/2$ blir $E_\mathrm{pot} = \frac{1}{2}k(x_\mathrm{max}/2)^2 = E_\mathrm{pot,max}/4$.

Oppgave 2. Skråplan

a.
Her er:

$F_\mathrm{N,A} = m_\mathrm{A}g$,
$F_\mathrm{f,A} = \mu_\mathrm{k}F_\mathrm{N,A} = \mu_\mathrm{k}m_\mathrm{A}g$,
$F_\mathrm{N,B} = m_\mathrm{B}g\cos\theta$,
$F_\mathrm{f,B} = \mu_\mathrm{k}F_\mathrm{N,B} = \mu_\mathrm{k}m_\mathrm{B}g\cos\theta$,
Masseløse snorer og trinser gir at det er bare to ulike snorkrefter.



b. Ved konstant fart gir Newton 1 at summen av alle krefter på hvert legeme er lik null. For legeme A får vi

$$S_1 - \mu_k m_A g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_1 = \mu_k m_A g = 0,350 \cdot 2,5\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{8,58\,\mathrm{N}}\,.$$

c. Finner først uttrykk for snorkrafta S_2 mellom B og C fra Newton 1 på C: $\qquad S_2 = m_C g\,.$

Denne koples til Newton 1 på kloss B:

$$S_2 - S_1 - \mu_k m_B g \cos\theta - m_B g \sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m_C g = S_2 = S_1 + \mu_k m_B g \cos\theta + m_B g \sin\theta$$

Med $S_1 = \mu_k m_A g$ og $m_A = m_B$ får vi

$$m_C = m_B(\mu_k + \mu_k \cos\theta + \sin\theta) = 2,50\,\mathrm{kg} \cdot (0,350 + 0,350 \cdot 0,800 + 0,600) = 3,075\,\mathrm{kg} = \underline{3,08\,\mathrm{kg}}\,. \tag{1}$$

Noe mindre regning å bruke N1 på alle klosser A+B+C som ett legeme, slik at snorkreftene ikke inngår:

$$\sum F = m_C g - \mu_k m_A g - \mu_k m_B g \cos\theta - m_B g \sin\theta = 0$$

altså samme uttrykk for m_C som over.

d. Når snora kuttes får B og C samme akselerasjon, a. Det enkleste er å se på B+C som ett system, slik at snorkrafta S_2 ikke inngår, og anvende Newton 2:

$$m_C g - \mu_k m_B g \cos\theta - m_B g \sin\theta = (m_B + m_C)a \tag{2}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} a &= g \cdot \frac{m_C - m_B \mu_k \cos\theta - m_B \sin\theta}{m_B + m_C} && (3) \\ &= 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \frac{3,075\,\mathrm{kg} - 2,50\,\mathrm{kg} \cdot 0,350 \cdot 0,800 - 2,50\,\mathrm{kg} \cdot 0,600}{3,075\,\mathrm{kg} + 2,50\,\mathrm{kg}} = \underline{1,54\,\mathrm{m/s^2}}\,. \end{aligned}$$

Den litt mer strevsomme metoden er å ta B og C som to legemer. Vi har da to ukjente: a (lik for B og C) og snorstrekket S_2 mellom kloss B og C. Newton 2 på kloss B og på kloss C:

$$\begin{aligned} S_2 - \mu_k m_B g \cos\theta - m_B g \sin\theta &= m_B a && (4) \\ m_C g - S_2 &= m_C a\,. && (5) \end{aligned}$$

Likn. (5) gir $S_2 = m_C(g - a)$ som settes inn i (4) og gir

$$m_C(g - a) - \mu_k m_B g \cos\theta - m_B g \sin\theta = m_B a\,.$$

Dette gir samme a som ovenfor.

Én smart student argumenterte som så: Når snora klippes faller snorkrafta S_1 bort. Denne hadde verdi $S_1 = 8,58\,\mathrm{N}$ og det betyr at dette blir overskuddskrafta som akselererer systemet som nå er B+C. Resten av kreftene vil akkurat nøytralisere og gi likevekt, som beregnet ovenfor. Akselerasjonen blir da:

$$a = \frac{S_1}{m_B + m_C} = \frac{8,58\,\mathrm{N}}{3,075\,\mathrm{kg} + 2,50\,\mathrm{kg}} = \underline{1,54\,\mathrm{m/s^2}}.$$

Enklere kan det vel ikke gjøres.

Oppgave 3. Loop

a.

$$E_k = E_{k,trans} + E_{k,rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \underline{\frac{7}{10}mv^2}\,.$$

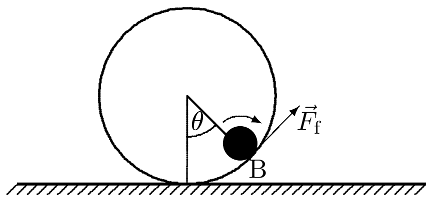
b. Vi velger høyde $h = 0$ på underlaget. Ved A har kulas tyngdepunkt en høyde $h = r$, ved C er høyden $h = R$. Bevaring av energi gir:

$$\begin{aligned} mgr + \frac{7}{10}mv_A^2 &= mgR + \frac{7}{10}mv_C^2 && (6) \\ \Rightarrow \quad v_C^2 &= v_A^2 - gR^* \cdot \frac{10}{7} = 9,0\,\mathrm{m^2/s^2} - 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0,200\,\mathrm{m} \cdot \frac{10}{7} = 6,197\,\mathrm{m^2/s^2}, && (7) \end{aligned}$$

der vi har brukt $R^* = R - r = 0,200$ m.

$$v_C = \sqrt{6,197}\,\mathrm{m/s} = 2,489\,\mathrm{m/s} = \underline{2,49\,\mathrm{m/s}}\,.$$

c. Vinkelhastigheten for kula avtar, og eneste krafta som gir vinkelakselerasjon er friksjonskrafta F_f. Derfor må F_f virke motsatt rotasjonsretningen, dvs. **oppover**, og parallelt med underlaget, som vist i figuren.



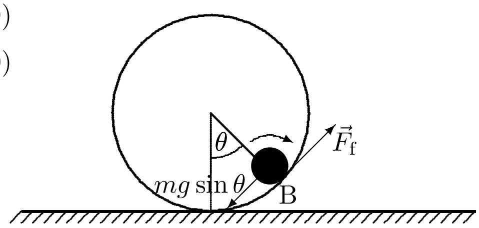
Med positiv omdreining i kulas rulleretning (med klokka) gir spinnsatsen

$$\sum \tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad -F_\mathrm{f}\, r = I\alpha \qquad \left(\Rightarrow \quad F_\mathrm{f} = -\frac{2}{5}mr\alpha\right). \tag{8}$$

d.

$$\text{N2 med pos oppover:} \qquad ma = F_\mathrm{f} - mg\sin\theta \tag{9}$$

$$\text{N2-rot (8) med } \alpha = a/r\text{:} \qquad I\alpha = I\frac{a}{r} = -F_\mathrm{f} r \tag{10}$$



Likn. (8) eller (10) gir

$$F_\mathrm{f} = -I\frac{a}{r^2} = -\frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r^2} = -\frac{2}{5}ma,$$

som innsatt i (9) gir

$$ma(1+\frac{2}{5}) = -mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \underline{a = -\frac{5}{7}g\sin\theta.} \tag{11}$$

Kan også vises fra energibalanse:

$$E_\mathrm{tot} = \frac{7}{10}mv^2 + mgh = \frac{7}{10}mv^2 + mgR^*\left(1-\cos\theta\right) = \text{konst.}$$

Derivasjon $\mathrm{d}E_\mathrm{tot}/\mathrm{d}t$ gir $\quad \frac{7}{10}m\, 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + mgR^*\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a = -\frac{5}{7}g\sin\theta.$

Her har vi brukt $R^*\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v$ slik at v forkortes bort.

e. I stilling C er $\theta = 90°$, dvs. $a = -\frac{5}{7}g\sin\theta = -\frac{5}{7}g$. Da er vinkelakselerasjonen $\alpha = \frac{a}{r} = -\frac{5}{7}\frac{g}{r}$. Det er kun F_f som gir α, og skal kula rulle (uten å slure) er nødvendig friksjonskraft gitt ved likn. (10):

$$F_\mathrm{f} = -I\frac{\alpha}{r} = -\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\frac{g}{r^2}\right) = \underline{\frac{2}{7}mg} = \frac{2}{7}\cdot 0,150\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{0,420\,\mathrm{N}.}$$

Kan også finnes fra likn. (9): $\quad F_\mathrm{f} = ma + mg\sin\theta \overset{(11)}{=} -\frac{5}{7}mg\sin\theta + mg\sin\theta = \frac{2}{7}mg\sin\theta.$

f. Maksimal friksjonskraft er

$$F_\mathrm{f,max} = \mu_s \cdot F_N,$$

så vi må finne hva normalkrafta er mot underlaget ved C.

$$\sum F = ma_c \quad \Rightarrow \quad F_N = m\frac{v_\mathrm{C}^2}{R^*} = 0,150\,\mathrm{kg}\cdot\frac{6,197\,\mathrm{m^2/s^2}}{0,200\,\mathrm{m}} = 4,65\,\mathrm{N}.$$

Dermed er

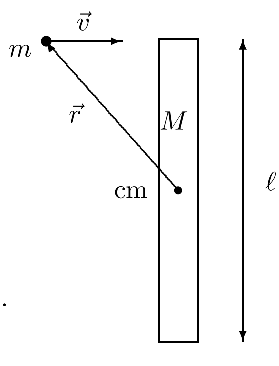
$$F_\mathrm{f,max} = \mu_s \cdot F_N = 0,200\cdot 4,65\,\mathrm{N} = 0,930\,\mathrm{N}\,.$$

Nødvendig friksjonskraft $F_\mathrm{f} = 0,42\,\mathrm{N}$ er godt under det maksimale: kula ruller fortsatt trygt uten fare for å slure. (Sagt på annen måte: Nødvendig friksjonskoeffisient er $F_\mathrm{f}/F_\mathrm{N} = 0,42/4,65 = 0,090$, og den virkelige er større.)

Oppgave 4.

a. Kollisjon. Bevegelsesmengde før og etter kollisjonen:

$$p = mv \qquad p' = (m+M)v'\,.$$



Retningen for p og p' er begge mot høyre. Med $m \ll M$ blir $p' = Mv'$. Spinnet L om cm før kollisjonen utgjøres av prosjektilets translasjon. L er lik for alle $\vec{r}$ og beregnes:

$$L = |\vec{r}\times m\vec{v}| = \frac{1}{2}\ell\cdot mv\,.$$

Når vi ser bort fra spinnet for m er spinnet L' etter kollisjonen

$$L' = I\omega = \frac{1}{12}M\ell^2\cdot\omega'. \qquad \left(I = \frac{1}{12}M\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \text{ hvis ikke se bort fra } m\right).$$

Retningen for $\vec{L}$ er rett ned i papirplanet. Under kollisjonen er

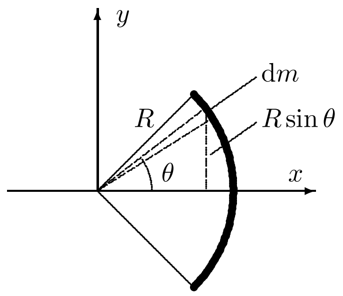
$$p \text{ bevart} \quad \Rightarrow \quad v' = v \cdot \frac{m}{M+m} \approx v \cdot \frac{m}{M}$$

$$L \text{ bevart} \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{\frac{1}{2}mv\ell}{\frac{1}{12}M\ell^2} = \frac{6mv}{M\ell} = \frac{6}{\ell} \cdot v'.$$

Dermed er

$$\underline{\frac{v'}{\omega'}} = v \cdot \frac{m}{M+m} \cdot \frac{M\ell}{6mv} = \frac{M}{M+m}\frac{\ell}{6} \approx \underline{\frac{\ell}{6}},$$

b. Treghetsmoment. Som angitt: koordinatsystem (x, y) med origo i segmentets sentrum og rotasjonsaksen langs x-aksen. Deler segmentet opp i korte segment med lengde $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$ og masse $\mathrm{d}m = m\,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\pi/2}$ (andel av hele segmentets masse m.) Elementets avstand fra rotasjonsaksen er $r = R\sin\theta$. Da blir treghetsmomentet:



$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 \mathrm{d}m = 2\int_0^{\pi/4} r^2 \mathrm{d}m = 2\int_0^{\pi/4} R^2\sin^2\theta \cdot m\,\frac{2\,\mathrm{d}\theta}{\pi} = \frac{4R^2m}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\,,$$

der vi har valgt å integrere 2× halve segmentet. Omskriving $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} = \int_0^{\pi/2}$ blir galt. Integralet av $\sin^2\theta$ er oppgitt.

$$I = \frac{4R^2m}{\pi}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{4R^2m}{\pi}\left[\frac{1}{2}\cdot\pi/4 - \frac{1}{4} - 0 + 0\right] = \underline{\frac{1}{2}mR^2\cdot\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)} = \underline{\frac{1}{2}mR^2\cdot 0,363}\,.$$

c. Gravitasjon La h være høyden over jordoverflata slik at satelittens baneradius er $r = R + h = 6380\,\mathrm{km} + 390\,\mathrm{km} = 6770\,\mathrm{km}$. Satelitten med masse m må ha gravitasjonskraft lik sentripetalkraft i den sirkulære banen:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}\,.$$

Vi skulle ikke bruke tallverdier for G og M slik at vi må uttrykke disse med andre kjente størrelser. På jordoverflata vil et legeme med masse m_j ha tyngde

$$m_j g = G\frac{m_j M}{R^2} \qquad \Rightarrow \qquad GM = gR^2$$

som innsatt i uttrykk for v gir

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(6380\,\mathrm{km})^2}{6770\,\mathrm{km}}} = 7,680\,\mathrm{km/s} = \underline{7,68\,\mathrm{km/s}}.$$

Relasjonen $v = 2\pi r/T$ gir

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot 6770\,\mathrm{km}}{7,680\,\mathrm{km/s}} = 5539\,\mathrm{s} = 92,3\,\mathrm{min} = \underline{1\mathrm{h}\,32'19''}.$$

En del har tatt utsagnet "G og M ukjente" bokstavlig og latt disse inngå i endelig svar. Det var sjølvsagt meningen at de "ukjente" G og M skal elimineres ved å uttrykke dem med g og jordradius R. Verdier for g og R var oppgitt som hjelp/tips til dette.

<u>Karakterstatistikk:</u>

	A	B	C	D	E	F	Totalt	Middel	Middel *)
TFY4145	27	21	49	10	5	5	117	C	3,34
FY1001	4	11	17	6	7	9	54	D	2,48
Sum	31	32	66	16	12	14	171	C	3,07

*) Middel tallekvivalent basert på : A=5, B=4, C=3, D=2, E=1, F=0

Middelkarakter for de ulike oppgavene i % (0-39 = F, . . . 90-100 =A), fra faglærers bedømmelse:

1:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k		
	31	62	94	72	44	59	62	54	57	59	85		
2:	a	b	c	d	3:	a	b	c	d	e	f	4:	a	b	c
	94	88	81	70		96	81	65	40	39	31		80	70	75

A Mikkelsen 8. jan. 2009