Eksamen TFY4145 8. aug. 09. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h
Rett svar:	D	E	A	D	A	B	C	D

a. D. I tyngdefeltet peker akselerasjonen, $\vec{g}$, alltid rett nedover.

b. E. Ved gliding er $F_{\rm f} = \mu_{\rm k} F_{\rm N} = \mu_{\rm k}(mg - F\sin\theta)$. (Normalkrafta blir altså mindre som følge av at F har komponent oppover.) Fra $\sum F_x = 0$ (farta konstant) får vi også $F_{\rm f} = F\cos\theta$, slik at to alternativ er rette.

c. A. Bruk Steiners sats: $I = I_{\rm cm} + Mh^2$.

d. D. Kraftmomentet $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ vil etter høyrehåndsregelen falle langs $-x$.

e. A. Vinkelhastighet $\omega = v/R = 4,0\,{\rm s}^{-1}$. Treghetsmomentet for tynn ring er $I = mr^2 = 0,25\,{\rm kg\,m}^2$. Spinnet er da $L = I\omega = 1,00\ {\rm kg\,m^2 s^{-1}}$.

f. B. Akselerasjon $a = F/m$ der $F = k\Delta x$ er fjærkraft. F er minst når utslaget Δx er minst, dvs. på likevektslinja.

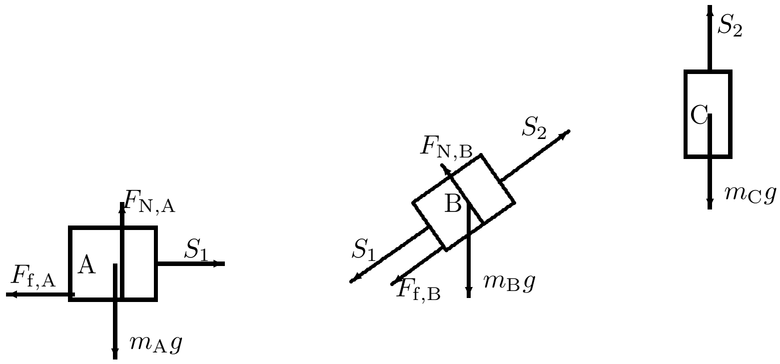
g. C. La L være bjelkens lengde. Vertikalkomponenten F_y finnes enkelt ved momentbalanse om ytterpunktet på bjelken, der kun denne krafta og bjelkens tyngde har moment: $F_y \cdot L - G \cdot L/2 = 0$, som gir $F_y = G/2 = 50,0$ N.

h. D. Må først finne S fra tauet: Kraftmomentbalanse om bjelkens venstre punkt: $S \cdot \sin 30° \cdot L = 100\,{\rm N} \cdot L/2 + 150\,{\rm N} \cdot L$ gir $S = 400$ N. $\sum F_x = 0$ gir at krafta på bjelken fra hengslingen er $F_x = S_x = S\cos 30° = 346,4$ N.

Oppgave 2. Skråplan

a.
Kraftdiagram på alle klossene er tegnet, kun spørsmål om kloss B. Størrelsene er:

$F_{\rm N,A} = m_{\rm A} g$,
$F_{\rm f,A} = \mu_{\rm k} F_{\rm N,A} = \mu_{\rm k} m_{\rm A} g$,
$F_{\rm N,B} = m_{\rm B} g\cos\theta$,
$F_{\rm f,B} = \mu_{\rm k} F_{\rm N,B} = \mu_{\rm k} m_{\rm B} g\cos\theta$,
Masseløse snorer og friksjonsløse trinser gir at det er bare to ulike snorkrefter når systemet beveger seg med konstant fart.



b. Ved konstant fart gir Newton 1 at summen av alle krefter på hvert legeme er lik null. Da trinsa er friksjonsløs virker på trinsa mellom A og B en snorkraft som er lik fra hver side. Snorkrafta S_1 nedover på B virker derfor mot høyre på A. I fartsretningen virker i tillegg friksjonsfrafta $F_{\rm f,A} = \mu_{\rm k} m_{\rm A} g$ mot venstre på A. Newton 1 på legeme A gir da

$$S_1 - \mu_{\rm k} m_{\rm A} g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_1 = \mu_{\rm k} m_{\rm A} g = 0,350 \cdot 2,5\,{\rm kg} \cdot 9,81\,{\rm m/s^2} = \underline{8,58\,{\rm N}}.$$

c. Finner først uttrykk for snorkrafta S_2 mellom B og C fra Newton 1 på C: $S_2 = m_{\rm C} g$.
Denne koples til Newton 1 på kloss B:

$$S_2 - S_1 - \mu_{\rm k} m_{\rm B} g\cos\theta - m_{\rm B} g\sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m_{\rm C} g = S_2 = S_1 + \mu_{\rm k} m_{\rm B} g\cos\theta + m_{\rm B} g\sin\theta$$

Med $S_1 = \mu_{\rm k} m_{\rm A} g$ og $m_{\rm A} = m_{\rm B}$ får vi

$$m_{\rm C} = m_{\rm B}(\mu_{\rm k} + \mu_{\rm k}\cos\theta + \sin\theta) = 2,50\,{\rm kg} \cdot (0,350 + 0,350 \cdot 0,800 + 0,600) = 3,075\,{\rm kg} = \underline{3,08\,{\rm kg}}. \tag{1}$$

Noe mindre regning å bruke N1 på alle klosser A+B+C som ett legeme, slik at snorkreftene ikke inngår:

$$\sum F = m_{\rm C} g - \mu_{\rm k} m_{\rm A} g - \mu_{\rm k} m_{\rm B} g\cos\theta - m_{\rm B} g\sin\theta = 0$$

altså samme uttrykk for $m_{\rm C}$ som over.

d. Når snora kuttes får B og C samme akselerasjon, a. I tillegg får trinsa på toppen en vinkelakselerasjon $\alpha = a/r$. Det at trinsa skal akselereres gjør at snorkrafta på B og på C ikke blir like. Det enkleste er å se på B+C+trinse som ett system, slik at snorkreftene ikke inngår, og anvende Newton 2. Rotasjonen til trinsa krever en akselererende kraft $F_{\rm T}$ gitt av spinnsatsen

$$F_{\rm T} r = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad F_{\rm T} = \frac{I\alpha}{r} = \frac{\frac{1}{2} m_{\rm T} r^2 \cdot a/r}{r} = \frac{1}{2} m_{\rm T} a$$

Newton to på B+C+trinse gir da

$$\sum F = m_{\rm C}g - \mu_{\rm k}m_{\rm B}g\cos\theta - m_{\rm B}g\sin\theta = (m_{\rm B} + m_{\rm C} + \frac{1}{2}m_{\rm T})a \tag{2}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} a &= g\cdot\frac{m_{\rm C} - m_{\rm B}\mu_{\rm k}\cos\theta - m_{\rm B}\sin\theta}{m_{\rm B} + m_{\rm C} + \frac{1}{2}m_{\rm T}} \qquad (3)\\ &= 9,81\,{\rm m/s^2}\cdot\frac{3,075\,{\rm kg} - 2,50\,{\rm kg}\cdot 0,350\cdot 0,800 - 2,50\,{\rm kg}\cdot 0,600}{3,075\,{\rm kg} + 2,50\,{\rm kg} + 1,00\,{\rm kg}} = \underline{1,31\,{\rm m/s^2}}\,. \end{aligned}$$

Den litt mer strevsomme metoden er å ta B, C og T som tre legemer. Vi har da tre ukjente: $a = \alpha r$, snorstrekket S_2 mellom kloss B og T og snorstrekket S_3 mellom T og C. Newton 2 på hver av de tre legemene gir:

$$\begin{aligned} S_2 - \mu_{\rm k}m_{\rm B}g\cos\theta - m_{\rm B}g\sin\theta &= m_{\rm B}a \qquad (4)\\ (S_3 - S_2)\cdot r &= I\alpha = \frac{1}{2}m_{\rm T}r^2\cdot\frac{a}{r} = \frac{1}{2}m_{\rm T}ar \qquad (5)\\ m_{\rm C}g - S_3 &= m_{\rm C}a\,. \qquad (6) \end{aligned}$$

Likn. (6) gir $S_3 = m_{\rm C}(g-a)$ som settes inn i (5) og gir

$$m_{\rm C}(g-a) - S_2 = \frac{1}{2}m_{\rm T}a \qquad \Rightarrow \qquad S_2 = m_{\rm C}(g-a) - \frac{1}{2}m_{\rm T}a\,.$$

S_2 settes inn i (4) og gir

$$m_{\rm C}(g-a) - \frac{1}{2}m_{\rm T}a - \mu_{\rm k}m_{\rm B}g\cos\theta - m_{\rm B}g\sin\theta = m_{\rm B}a\,.$$

og endelig, som (3) over:

$$a = g\cdot\frac{m_{\rm C} - m_{\rm B}\mu_{\rm k}\cos\theta - m_{\rm B}\sin\theta}{m_{\rm B} + m_{\rm C} + \frac{1}{2}m_{\rm T}}$$

Oppgave 3. Utrulling av jojo.

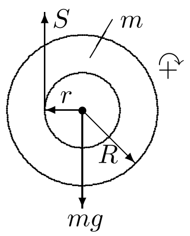
a. $m = \rho V = \underline{\rho 2b\pi R^2} = 1,25\ \cdot 10^3\,{\rm kg/m^3}\cdot 2\cdot 0,010\,{\rm m}\cdot\pi\,(0,025\,{\rm m})^2 = 0,0491\,{\rm kg} = \underline{0,049\,{\rm kg}}$.

b. Treghetsmoment for sylinder om symmetriakse: $\underline{I = \frac{1}{2}mR^2}$. Det er to sylindre, men når m er den totale massen og radiene er like, blir det samme formel.
Tallverdi: $I = \frac{1}{2}\cdot 0,0491\,{\rm kg}\cdot(0,025\,{\rm m})^2 = 1,534\cdot 10^{-5}\,{\rm kg\,m^2} = \underline{1,5\cdot 10^{-5}\,{\rm kg\,m^2}}$.

c. Som den frie variable i modellen kan vi enten velge z-koordinaten til jojoen, z, eller vinkelen som jojoen har rullet av, θ. Sammenhengen mellom disse to variablene er $z = r\theta$ når vi lar $\theta = 0$ svare til $z = 0$ og vi velger z positiv nedover. Vi velger z som koordinat. Da er akselerasjonen det spørres etter: $a = {\rm d}v/{\rm d}t = {\rm d}^2z/{\rm d}t^2$. Sammenhengen $z = r\theta$ gir videre

$$v = \frac{{\rm d}z}{{\rm d}t} = r\frac{{\rm d}\theta}{{\rm d}t} = r\omega \quad \text{og} \quad a = \frac{{\rm d}^2z}{{\rm d}t^2} = r\frac{{\rm d}^2\theta}{{\rm d}t^2} = r\dot\omega\,.$$

Vi har én frihetsgrad (koordinaten z) og to ukjente: akselerasjonen a og strekket S i snora. For å løse problemet trenger vi da to likninger som innholder de to ukjente.



Newton 2 translasjon: $\Sigma F = mg - S = ma$

Newton 2 rotasjon: $\Sigma\tau = r\cdot S = I\,\dot\omega$

Med $\dot\omega = a/r$ kan disse skrives som to likninger med to ukjente, S og a:

$$\begin{aligned} mg - S &= m\,a \qquad (7)\\ rS &= I\cdot\frac{a}{r} \qquad (8) \end{aligned}$$

Uttrykk for S fra første likning innsatt i andre og løsning mhp. a gir

$$a = g\cdot\frac{1}{1 + I/(mr^2)} = g\cdot\frac{1}{1 + \frac{1}{2}mR^2/(mr^2)} = \underline{g\cdot\frac{2}{2 + R^2/r^2}}\,. \tag{9}$$

Akselerasjonen er altså uavhengig av jojoens masse (som for et legeme i fritt fall). Snordraget derimot er avhengig av massen, fra likn. (7) og (9) får vi

$$S = m(g-a) = mg\left(1 - \frac{2}{2 + R^2/r^2}\right) = \underline{mg\frac{1}{1 + 2r^2/R^2}}\,.$$

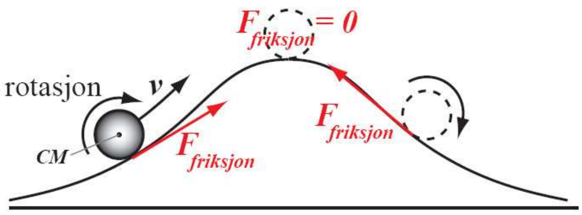
Tallverdier:

$$a = g \cdot \frac{2}{2 + (25)^2/(8,0)^2} = 9,81\ \text{m/s}^2 \cdot 0,170 = 1,668\,\text{m/s}^2 = \underline{1,67\ \text{m/s}^2}$$

$$\underline{S} = m(g-a) = 0,0491\ \text{kg} \cdot (9,81 - 1,668)\ \text{m/s}^2 = \underline{0,40\,\text{N}}$$

Oppgave 4. Diverse

a. Retningen til friksjonen fra underlaget på kula er markert med pilene i figuren. Rein rulling betyr ingen sluring mot underlaget og dermed er energien bevart. På veg oppover øker pot. energi og kin. energi avtar. Ved rulling er $v = \omega R$ (R = kuleradius) slik at både v og rotasjonshastigheten (vinkelhartigheten) ω avtar på veg oppover, dvs. negativ vinkelakselerasjon.



Ifølge spinnsatsen må det være et kraftmoment som gir denne vinkelakselerasjonen. Det er tre krefter som virker på kula; gravitasjonen, normalkrafta fra underlaget og friksjonen fra underlaget. Av disse er det kun friksjonskrafta som kan gi rotasjon om massemiddelpunktet. Friksjonen må sette opp et kraftmoment som virker mot rotasjonsbevegelsen på vei oppover, og det gir den retningen på friksjonskrafta som er indikert.

På veien nedover blir argumentasjonen som på veien opp, bare med motsatt fortegn, det vil si at friksjonskrafta må sette opp et kraftmoment som fører til raskere og raskere rotasjon. Friksjonskrafta må da virke som angitt i figuren. På toppen har ikke kula noe vinkelakselerasjon, det vil si at friksjonskrafta her er null (slik som for rein rulling på flatt underlag).

b. Akselerasjonen $\vec{a}$ består av tangentialakselerasjonen a_t parallelt med banen og sentripetalakselerasjonen a_c normalt på banen, slik at $\vec{a} = a_t\hat{\theta} - a_c\hat{r}$, der $\hat{\theta}$ og $\hat{r}$ er enhetsvektorer langs banen og normalt (utoverretning) på banen. Sentripetalakselerasjonen $a_c = v^2/r$, slik at når denne er bestemt finner vi farten.

Tangentialakselerasjonen er komponenten av $\vec{a}$ normalt på radiusvektor:

$$a_c = |\vec{a}| \cdot \sin\theta = 18,0\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 48,2^\circ = 13,4\,\text{m/s}^2 = \underline{13\,\text{m/s}^2}\,.$$

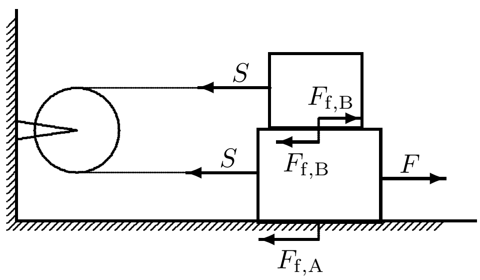
Sentripetalakselerasjonen er komponenten av $\vec{a}$ langs radiusvektor:

$$a_c = |\vec{a}| \cdot \cos\theta = 18,0\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 48,2^\circ = \underline{12,0\,\text{m/s}^2}\,.$$

Fra $a_c = v^2/r$ finner vi banefarten

$$v = \sqrt{a_c\, r} = \sqrt{12,0\,\text{m/s}^2 \cdot 3,00\,\text{m}} = \underline{6,00\,\text{m/s}}\,.$$

c. Figuren viser alle krefter i horisontal retning på kloss A og B. I tillegg virker vertikale krefter (som ikke er tegnet i figuren): Tyngdekrefter m_A og m_B på henholdsvis A og B, normalkraft $F_{N,A}$ oppover fra underlaget på A, normalkraft $F_{N,B}$ nedover på A fra kloss B og $F_{N,B}$ oppover på B fra A. Aktuell horisontal bevegelse for de to klossene er motsatt rettet.



Skal klossene bevege seg må akkurat trekkrafta F være lik sum av krefter i motsatt retning på A, som er friksjonskrefter og snorkraft. Tilsvarende for B. Friksjonskreftene er

$$\begin{aligned} F_{f,A} &= \mu_s F_{N,A} = \mu_s(m_A + m_B)g \\ F_{f,B} &= \mu_s F_{N,B} = \mu_s m_B g \\ \text{Newton 2 kloss A:} \quad F &= S + F_{f,A} + F_{f,B} \\ \text{Newton 2 kloss B:} \quad S &= F_{f,B} \end{aligned}$$

Newton 2 gir

$$F = F_{f,B} + F_{f,A} + F_{f,B} = F_{f,A} + 2F_{f,B}.$$

Friksjonskreftene innsatt gir

$$F = \mu_s(m_A + m_B)g + 2\mu_s m_B g = \mu_s(m_A + 3m_B)g = 0,60 \cdot (5,00\,\text{kg} + 3 \cdot 3,00\,\text{kg}) \cdot 9,81\,\text{m/s}^2 = 82,4\,\text{N} = \underline{82\,\text{N}}\,.$$

A. Mi. 10. aug. 2009