Eksamen TFY4145/FY1001 9. aug. 2010. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	E	B	A	B	C	A	A	D	E	D

Detaljer om spørsmålene:

a. E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover.

b. B. Arbeid = tap i kinetisk energi: $Fs = \frac{1}{2}mv^2$, som gir $F = mv^2/(2s) = 47{,}3$ kN.

c. A. Landingen på krusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinnet L er bevart.

d. B. Akselerasjon $a = F/m$ der $F = k\Delta x$ er fjærkraft. F er minst når utslaget Δx er minst, dvs. på likevektslinja.

e. C. La L være bjelkens lengde. Vertikalkomponenten F_y finnes enkelt ved momentbalanse om ytterpunktet på bjelken, der kun denne krafta og bjelkens tyngde har moment: $F_y \cdot L - G \cdot L/2 = 0$, som gir $F_y = G/2 = 50,0$ N.

f. A. Vinkelhastighet $\omega = v/R = 4,0\,\mathrm{s}^{-1}$. Treghetsmomentet for tynn ring er $I = mr^2 = 0,25\,\mathrm{kg\,m}^2$. Spinnet er da $L = I\omega = 1,00\ \mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}$.

g. A. Total energi = maks. pot. en. = $E_{\mathrm{pot,max}} = \frac{1}{2}kx_{\mathrm{max}}^2$. Når $x = x_{\mathrm{max}}/2$ blir $E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}k(x_{\mathrm{max}}/2)^2 = E_{\mathrm{pot,max}}/4$.

h. D. $\dot{x}(t) = \frac{2{,}0\,\mathrm{m}}{\pi} \cdot 4\pi\mathrm{s}^{-1} \cdot \cos\left(4\pi\mathrm{s}^{-1}\,t + \pi/3\right)$ og ved 2,0 s er denne $8,0\,\mathrm{m/s} \cdot \cos(8\pi + \pi/3) = 8,0\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{1}{2}$.

i. E. $\vec{r} \| \vec{F}$ slik at kraftmomentet $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$.

j. D. Translasjonsfarten $v = \omega R$ er gitt ved energibevarelse: $Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}v^2(IR^{-2} + M)$. En sylinder har større treghetsmoment enn kuler: $I_{\mathrm{syl}} = \frac{1}{2}MR^2$, $I_{\mathrm{kule}} = \frac{2}{5}MR^2$. Da blir v minst for sylinderen ved bunnen.

Oppgave 2.

a. Snorkrafta S og friksjonskrafta F_{f} virker begge horisontalt, definer positiv retning for F_{f} samme retning som S. Med translasjonsakselerasjon a og rotasjonsakselerasjon α er Newtons 2. lov for translasjon og for rotasjon:

$$\text{N-2 translasjon:} \qquad Ma = S + F_{\mathrm{f}} \tag{1}$$

$$\text{N-2 rotasjon:} \qquad I\alpha = \tau = Sr - F_{\mathrm{f}}R \tag{2}$$

I tillegg har vi likning for rein rulling: $\underline{\alpha = a/R}$, slik at vi har to ukjente: a og F_{f}. De to likningene (1) og (2) skal gi løsning, men vi trenger uttrykk for treghetsmomentet som for sylinder er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Innsatt dette uttrykket og $\alpha = a/R$ i (2) gir:

$$\frac{1}{2}MR^2 a/R = Sr - F_{\mathrm{f}}R \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}Ma = S\frac{r}{R} - F_{\mathrm{f}} \tag{3}$$

Vi finner først a ved å eliminere F_{f} fra (3):

$$F_{\mathrm{f}} = S\frac{r}{R} - \frac{1}{2}Ma, \tag{4}$$

og sette denne inn i (1). Dette gir

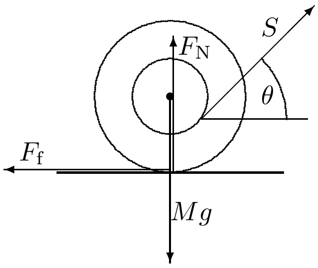
$$Ma = S + S\frac{r}{R} - \frac{1}{2}Ma \qquad \Rightarrow \qquad \underline{a = \frac{S}{M}\frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)}. \tag{5}$$

b. Den andre ukjente F_f finner vi ved å sette a inn i likn. (4):

$$F_\mathrm{f} = S\frac{r}{R} - \frac{1}{2}M\frac{S}{M}\frac{2}{3}\left(1+\frac{r}{R}\right) = S\frac{r}{R} - S\frac{1}{3} - S\frac{1}{3}\frac{r}{R} = \underline{S\frac{2}{3}\left(\frac{r}{R}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{6}$$

Friksjonskrafta er null nå $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$. Eneste kraft som virker i horisontal retning er da S, slik at akselerasjonen ifølge Newton 2 er $\underline{a = S/M}$. Dette kunne man også beregne fra likn. (5):

$$a = \frac{S}{M}\frac{2}{3}\left(1+\frac{r}{R}\right) = \frac{S}{M}\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{S}{M}$$



c. Kreftene som virker er snorkrafta S, tyngden Mg, normalkraft fra underlaget, F_N, og friksjonskraft fra underlaget, F_f.

Når snella ikke ruller er Newtons 1. lov oppfylt. Bruk av N1 for rotasjon og for translasjon i x-retning gir:

$$Sr = F_\mathrm{f}R \qquad \text{og} \qquad S\cos\theta = F_\mathrm{f}$$

Eliminering av F_f og S gir løsningen

$$\cos\theta = r/R = 1/3 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\theta = \arccos 1/3 = 70,5^\circ}.$$

Oppgave 3.

a. I tillegg til kreftene tegnet på figuren i oppgaven virker tyngdekrafta Mg rett nedover midt på stanga. Likevekt i x- og y-retning gir

$$F_y = Mg \qquad \text{og} \qquad F_x = F_s$$

Videre har vi rotasjonslikevekt om punktet B:

$$Mg\cdot\frac{L}{2}\cdot\sin\theta_0 = F_\mathrm{s}\cdot L\cos\theta_0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{F_\mathrm{s} = Mg\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan\theta_0}.$$

Da har vi bestemt F_s, og ergo blir

$$\underline{F_x = F_\mathrm{s} = Mg\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan\theta_0} \qquad \text{og} \qquad \underline{F_y = Mg}.$$

b. Vi bruker Steiners sats (parallellakseteoremet) til å finne I om endepunktet, som er i avstand $\frac{L}{2}$ fra tyngdepunktet:

$$I = I_\mathrm{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}ML^2}.$$

Kan også integrere, med $\mathrm{d}m = \mathrm{d}\ell\cdot M/L$:

$$I = \int_0^L \ell^2\mathrm{d}\ell\cdot M/L = \frac{M}{L}\cdot\left[\frac{1}{3}\ell^3\right]_0^L = \underline{\frac{1}{3}ML^2}.$$

c. Newtons 2. lov for rotasjon:

$$\tau = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad Mg\cdot\frac{L}{2}\cdot\sin\theta = \frac{1}{3}ML^2\cdot\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\alpha = \frac{g}{L}\cdot\frac{3}{2}\sin\theta}.$$

d. Bevegelsen kan sees på som rein rotasjon om B, slik at kin. energi er kun rotasjonsenergi $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2$.

Energi ved θ_0 lik energi ved vilkårlig θ:

$$Mg\,\frac{L}{2}\cos\theta_0 = \frac{1}{6}ML^2\,\omega^2 + Mg\,\frac{L}{2}\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \cos\theta\right)}}\,.$$

Man vil kunne verifisere ved derivasjon at $\dot{\omega} = \alpha$.

e. Umiddelbart etter snora er kutta er $\theta = \theta_0 = 30°$ og vinkelakselerasjonen $\alpha = \frac{g}{L}\cdot\frac{3}{2}\sin\theta_0 \quad \left(= \frac{g}{L}\cdot\frac{3}{4}\right)$.

Da $\omega = 0$ har vi ingen sentripetalakselerasjon, tyngdepunktet har derfor følgende tangentialakselerasjon, dvs. normalt på staven:

$$a = \frac{L}{2}\,\alpha = g\cdot\frac{3}{4}\sin\theta_0 \quad \left(= g\cdot\frac{3}{8}\right).$$

Denne akselerasjonen har komponent i henholdsvis x- og y-retning:

$$a_x = a\,\cos\theta_0 = g\cdot\frac{3}{4}\sin\theta_0\,\cos\theta_0 \quad \left(= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \qquad \text{og} \qquad a_y = -a\,\sin\theta_0 = -g\cdot\frac{3}{4}\sin^2\theta_0 \quad \left(= -g\cdot\frac{3}{16}\right).$$

Endelig gir da Newton 2 for x- og y-retning:

$$Ma_x = F_x \quad \Rightarrow \quad F_x = Mg\cdot\frac{3}{4}\sin\theta_0\,\cos\theta_0 = Mg\cdot\frac{3}{16}\sqrt{3} = \underline{0,325\cdot Mg} \tag{7}$$

$$Ma_y = F_y - Mg \quad \Rightarrow \quad F_y = Mg + Ma_y = Mg - Mg\cdot\frac{3}{4}\sin^2\theta_0 = Mg\left(1 - \frac{3}{16}\right) = \underline{0,813\cdot Mg}\,. \tag{8}$$

Oppgave 4.

a. Normalkrafta er $F_\text{N} = mg\cos\theta$ og dermed friksjonskrafta når klossen har begynt å gli

$$F_\text{f} = \mu_\text{k} mg\cos\theta = 0,42\cdot 1,00\,\text{kg}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2\cdot 0,866 = 3,568\,\text{N} = \underline{3,6\,\text{N}}\,.$$

Parallellkrafta nedover langs skråplanet er

$$F_{||} = mg\sin\theta = 1,00\,\text{kg}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2\cdot 0,50 = 4,905\,\text{N}$$

og dermed blir akselerasjonen nedover skråplanet

$$a = \frac{F_{||} - F_\text{f}}{m} = \frac{4,905\,\text{N} - 3,568\,\text{N}}{1,00\,\text{kg}} = \underline{1,34\,\text{m/s}^2}\,.$$

b. Vi må først finne ut hvilken retning friksjonskrafta har. Frik.krafta er alltid retta mot bevegelsen vi ville fått dersom det ikke var friksjon, slik at vi må finne ut hvilken retning klossen ville bevege seg med alle ytre krafter på plass, men *uten* friksjon. Netto akselererende kraft nedover skråplanet er uten friksjon:

$$F_\text{aks} = mg\sin\theta - F = 1,00\,\text{kg}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2\cdot 0,50 - 1,00\,\text{N} = 3,905\,\text{N}$$

positiv, og altså retta nedover. Friksjonskrafta er da retta oppover med verdi $\underline{F_\text{f} = 3,6\,\text{N}}$ som funnet ovenfor. Friksjonskrafta er mindre enn F_aks og dermed akselererer klossen nedover med

$$a = \frac{F_\text{aks} - F_\text{f}}{m} = \frac{3,905\,\text{N} - 3,568\,\text{N}}{1,00\,\text{kg}} = \frac{0,337\,\text{N}}{1,00\,\text{kg}} = \underline{0,34\,\text{m/s}^2}\,.$$

Vi burde også sjekke om F_aks er stor nok til å sette klossen i gang. Den maksimale statiske friksjonskrafta er

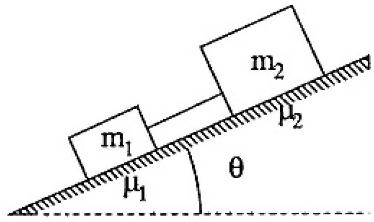
$$F_\text{f,max} = \mu_\text{s} mg\cos\theta = 0,45\cdot 1,00\,\text{kg}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2\cdot 0,866 = 3,823\,\text{N}\,,$$

altså mindre enn F_aks, så klossen vil starte å gli.

c. Med F = 2,00 N er netto akselererende kraft nedover $F_\text{aks} = 2,905\,\text{N}$, slik at friksjonskrafta også nå virker oppover. Størrelsen avhengig om klossen sklir eller i ro. Da F_aks nå er mindre enn den maksimale statiske friksjonskrafta $F_\text{f,max} = 3,823\,N$, vil klossen forbli i ro ($\underline{a = 0}$), summen av krefter er lik null og $\underline{F_\text{f} = F_\text{aks} = 2,91\,\text{N}}$.

Oppgave 5.

Vi tar det som en *arbeidshypotese* at snora er stram, slik at snorkrafta virker oppover på m_1 og nedover på m_2. Regningene vil bekrefte eller avkrefte denne hypotesen.



Med stram snor må akselerasjonen være den samme for de to klossene, altså

$$\begin{aligned} \frac{\sum F_1}{m_1} &= \frac{\sum F_2}{m_2} \\ \frac{m_1 g \sin\theta - m_1 g \mu_1 \cos\theta - S}{m_1} &= \frac{m_2 g \sin\theta - m_2 g \mu_2 \cos\theta + S}{m_2} \\ g(\sin\theta - \mu_1 \cos\theta) - S/m_1 &= g(\sin\theta - \mu_2\cos\theta) + S/m_2 \quad (9) \end{aligned}$$

Løses denne likningen med hensyn på S er resultatet

$$S = g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mu_2 - \mu_1)\cos\theta\,.$$

Som vi ser er åpenbart $S > 0$ uansett massenes størrelse, bare $\mu_2 > \mu_1$, som var oppgitt til å gjelde.

Alternativ kunne vi beregne akselerasjonen kloss 1 og 2 hadde fått dersom de ikke var forbundet med snor:

$$a_1 = g\sin\theta - g\mu_1\cos\theta\,, \qquad a_2 = g\sin\theta - g\mu_2\cos\theta\,.$$

Hvis kloss 1 akselererer fortere enn kloss 2 vil ei snor som forbinder klossene forbli stram, dvs. kravet er

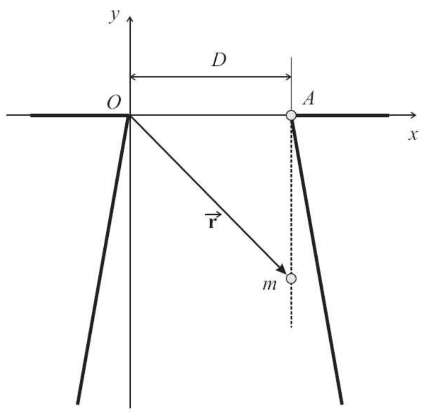
$$a_1 > a_2 \quad \Rightarrow \quad -g\mu_1\cos\theta > -g\mu_2\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_2 > \mu_1\,,$$

som var oppgitt til å gjelde.

Oppgave 6.

Hastigheten til massen er $\vec{v} = \vec{0} + \vec{g}\,t = -gt\,\hat{\mathbf{j}}$ og spinnet er definert:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\,\vec{v}\,.$$



Her vil $\vec{r} \times \vec{v}$ alltid peke i $-\hat{\mathbf{k}}$-retning og ha størrelse $r\sin\phi\; gt = Dgt$, der ϕ er vinkelen mellom $\vec{r}$ og $\vec{v}$. Dermed blir

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\,\vec{v} = -Dmgt\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Alternativt kan vi skrive beregningen:

$$\vec{r} = D\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \vec{v} = (D\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}) \times (-gt\,\hat{\mathbf{j}}) = -Dgt\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Kraftmoment:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} = r\sin\phi\; mg(-\hat{\mathbf{k}}) = -Dmg\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Merk at $\vec{\tau}_O = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$ som det skal være ifølge spinnsatsen.

A. Mi. 11. aug. 2010