Eksamen TFY4145/FY1001 8. aug. 2011. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Rett svar:	E	A	C	D	C	C	B	A	B

Detaljer om spørsmålene:

a. E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover.

b. A. Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinnet L er bevart.

c. C. En massiv sylinder har $I = \frac{1}{2}mR^2$. Kin.energi er $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2(v/R)^2 = \frac{3}{4}mv^2$.

d. D. Hastighet endrer retning, dermed også (sentripetal)akselerasjon mot senturm. Sum av krefter må virke mot sentrum og dermed $\vec{F} \perp \vec{v}$ og ingen arbeid gjøres.

e. C. La L være bjelkens lengde. Med G_B = tyngden til bjelken, G = tyngden til lasten og S = snorkrafta, gir momentbalanse om hengslingen ved veggen: $L\,G_B + 2L\,G - 2L\,S\ \cdot \sin 30°$, som løst mhp S gir $S = \dfrac{G_B + 2G}{2\cdot\sin 30°} = \dfrac{100\,N + 2\cdot 150\,N}{2\cdot 0,500} = 400\,N$.

f. C. Når kulene henger sammen er dette et fullstendig uelastisk støt, og det vil tapes energi. Under en kollisjon uten ytre krefter er alltid p og L bevart (her er sammenhengen $L = \ell p$ for hver av kulene, der ℓ er snorlengden.

g. B. Fart til venstre kule *før* støt fra energibevarelse $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \;\Rightarrow\; v_1^2 = 2gh$. Med v' = fellesfarten etter støtet gir bevaring av bevegelsesmengden: $mv_1 = 2mv'$. Energibevaring *etter* støtet gir: $2mgH = \frac{1}{2}(2m)\,v'^2$, som gir $H = \frac{1}{2}\frac{v'^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{4g} = \frac{1}{2}\frac{2gh}{4g} = \frac{h}{4}$.

h. A Sykkelhjulet har størst treghetsmoment og får størst rotasjonsenergi og dermed mindre translasjonsenergi og minst fart v. Motsatt har massiv kule minst treghetsmomsnt og størst fart. Evt. utregnet:
Totalenergien ved enden (høydeforskjell h) er $E = Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$. For alle gjelder $v = \omega R$, slik at $E = Mgh = \frac{1}{2}(M + I/R^2)v^2$. Innsatt treghetsmoment I:
Hjulet: $Mgh = \frac{1}{2}\cdot(1+1)Mv^2$
Hule kula: $Mgh = \frac{1}{2}\cdot(1+\frac{2}{3})Mv^2$
Massive kula: $Mgh = \frac{1}{2}\cdot(1+\frac{2}{5})Mv^2$
M kan forkortes (altså uten betydning) og med samme h ser vi at hjulet får lavest translasjonshastighet v ved enden, mens den massive kula får høyest.

i. B. Kuben vil starte å gli når $mg\sin\theta > F_{\rm f,max} = \mu_{\rm s}F_{\rm N} = 0,65\cdot mg\cos\theta$, altså ved $\theta = \arctan 0,65 = 33°$. Grensen for å tippe over er når massesenteret ligger rett over nedre kontaktpunkt (momentbalanse). For en kube (kvadratisk sidekant) skjer dette ved $\theta = 45°$.

Oppgave 2. Fallende stang.

a. I tillegg til kreftene tegnet på figuren i oppgaven virker tyngdekrafta Mg rett nedover midt på stanga. Likevekt i x- og y-retning gir

$$F_y = Mg \qquad \text{og} \qquad F_x = F_s$$

Videre har vi rotasjonslikevekt om punktet B:

$$Mg\cdot\frac{L}{2}\cdot\sin\theta_0 = F_{\rm s}\cdot L\cos\theta_0 \qquad\Rightarrow\qquad \underline{F_{\rm s} = Mg\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan\theta_0}\,.$$

Da har vi bestemt $F_{\rm s}$, og ergo blir

$$\underline{F_x = F_{\rm s} = Mg\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan\theta_0} \qquad \text{og} \qquad \underline{F_y = Mg}\,.$$

b. Vi bruker Steiners sats (parallellakseteoremet) til å finne I om endepunktet, som er i avstand $\frac{L}{2}$ fra tyngdepunktet:

$$I = I_{\text{cm}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}ML^2}\,.$$

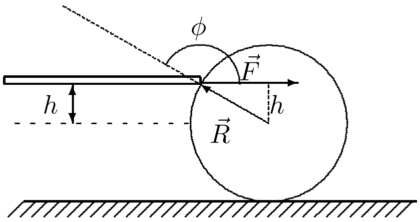
Kan også integrere, med $\mathrm{d}m = \mathrm{d}\ell \cdot M/L$:

$$I = \int_0^L \ell^2 \mathrm{d}\ell \cdot M/L = \frac{M}{L}\cdot\left[\frac{1}{3}\ell^3\right]_0^L = \underline{\frac{1}{3}ML^2}\,.$$

c. Bevegelsen kan sees på som rein rotasjon om B, slik at kin. energi er kun rotasjonsenergi $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2$. Energi ved θ_0 lik energi ved vilkårlig θ:

$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}$$

Oppgave 3. Biljardslag.



a. Kraftstøt for translasjon: $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$ som med startfart $\vec{v}_0 = 0$ gir

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v} \qquad \text{eller uten vektorer:} \quad \underline{F\Delta t = mv}.$$

Kraft(moment)støt for rotasjon: $\vec{\tau}\Delta t = \Delta\vec{L}$. Kraftas effektive arm om kulas sentrum er h slik at $\tau = FR\sin\phi = Fh$. For kula er $\vec{L} = I\vec{\omega}$, slik at med startfart $\omega_0 = 0$ er (uten vektorer)

$$\underline{Fh\Delta t = \Delta L = I\omega}.$$

Vi ser fra disse uttrykkene at

$$\underline{v = \frac{F\Delta t}{m}} \qquad \text{og} \qquad \underline{\omega = \frac{Fh\Delta t}{I} = \frac{5}{2}\frac{Fh\Delta t}{mR^2}}.$$

og følgelig $v = \omega\dfrac{I}{mh}$ (som kan være en hjelp i b. dersom du ikke fant uttykkene for v og ω.)

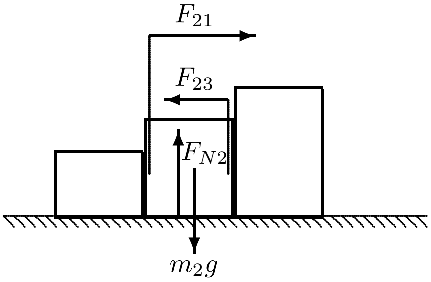
b. For ei rullende kule er $v = \omega R$. Dette kravet innsatt i $v = \omega\dfrac{I}{mh}$ fra pkt. a gir

$$\omega R = \omega\frac{I}{mh} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{I}{Rm} = \frac{\frac{2}{5}mR^2}{Rm} = \underline{\frac{2}{5}}R.$$

Kommentarer: Hvis køen treffer kula høyere enn $h/R = 2/5$, vil rett etter slaget kula slure med klokka ($\dot{\omega} > v/R$) for så å avta rotasjonshastighet til $\dot{\omega} = v/R$. Friksjonen gjør at kula vil øke litt i translasjonshastighet v under sluringen (noe av overskuddet av rotasjonsenergi overføres til translasjonsenergi). Dersom køen treffer kula lavere enn $h/R = 2/5$, vil $\dot{\omega} < v/R$, for så å øke rotasjonen til $\dot{\omega} = v/R$. Her vil v avta litt under friksjonsarbeidet (manglende rotasjonsenergi tas fra translasjonsenergien). Dette må alle gode biljardspillere kjenne til. Ved slag på siden av kula kan tilsvarende sideveis spinn skapes og dermed "skru".

Oppgave 4. Tre klosser.

a. Figuren under viser fire krefter på kloss 2: kontaktkrefter, tyngdekraft og normalkraft fra underlag:



Alle tre klosser som ett system:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{18\,\mathrm{kg\,m/s^2}}{9,00\,\mathrm{kg}} = \underline{2,00\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

For hver av de tre klossene:

$$\sum_1 F = m_1 a = 2,00\,\mathrm{kg}\cdot 2,00\,\mathrm{m/s^2} = \underline{4,00\,\mathrm{N}},$$
$$\sum_2 F = m_2 a = 3,00\,\mathrm{kg}\cdot 2,00\,\mathrm{m/s^2} = \underline{6,00\,\mathrm{N}},$$
$$\sum_3 F = m_3 a = 4,00\,\mathrm{kg}\cdot 2,00\,\mathrm{m/s^2} = \underline{8,00\,\mathrm{N}}.$$

Ifølge Newton 3 er kontaktkreftene motsatt like store: $F_{12} = F_{21}$ og $F_{23} = F_{32}$. Kontaktkreftene bestemmes f.eks. fra Newton 2 på klossene separat:

$$\text{N2 på kloss 3:} \qquad \sum_3 F = F_{32} \quad \Rightarrow \; F_{32} = \sum_3 F = \underline{8,00\,\mathrm{N}},$$

$$\text{N2 på kloss 1:} \qquad \sum_1 F = F - F_{12} \quad \Rightarrow \; F_{12} = F - \sum_1 F = 18,0\,\mathrm{N} - 4,00\,\mathrm{N} = \underline{14,0\,\mathrm{N}}.$$

b. Med friksjon virker det en kraft mot venstre på hver kloss:
$F_{f1} = \mu m_1\, g = 0,10 \cdot 2,00\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 2,00\,\mathrm{N}$
$F_{f2} = \mu m_2\, g = 0,10 \cdot 3,00\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 3,00\,\mathrm{N}$
$F_{f3} = \mu m_3\, g = 0,10 \cdot 4,00\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 4,00\,\mathrm{N}$.

Akselerasjonen blir dermed

$$a' = \frac{F - (F_{f1} + F_{f2} + F_{f3})}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{18\,\mathrm{N} - 9\,\mathrm{N}}{9,00\,\mathrm{kg}} = \frac{9}{9}\,\mathrm{m/s^2} = 1,00\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

og nødvendig kontaktkraft på kloss 3 bestemmes fra N2 på kloss 3:

$$\sum_3 F = F_{32} - F_{f3} \quad \Rightarrow F_{32} = \sum_3 F + F_{f3} = m_3 a' + F_{f3} = 4,00\,\mathrm{kg} \cdot 1,00\,\mathrm{m/s^2} + 4,00\,\mathrm{N} = \underline{8,0\,\mathrm{N}}\,.$$

Altså uendra fra om det ikke var friksjon! Med litt klokskap kan man resonnere at totalkrafta 18,0 N fordeler seg med samme forhold på kloss 1, 2 og 3 så lenge friksjonskoeffisienten er lik for hver kloss. Men noe av krafta går med til friksjon og akselerasjonen blir lavere. Dersom $\mu > 0,20$ står klossene i ro, men kontaktkreftene er fortsatt 8 N og 14 N og balanseres av friksjonskreftene.

Oppgave 5. Svingesystem.

a. Fjærkrafta $F = -kx$ er positiv mot høyre (negativ for positiv x). Fjærkrafta gir en akselerasjon $a = \ddot{x}$. Newton 2 på akslingen med kuler (masse $2 \cdot M/2 = M$):

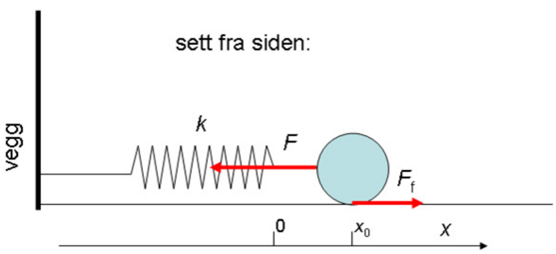
$$\sum F = M\ddot{x} = -kx, \qquad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0,$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$ og svingetid

$$\underline{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,00\,\mathrm{kg}}{200\,\mathrm{kg/s^2}}} = \underline{0,44\,\mathrm{s}}.$$

b. Fjærkrafta virker mot venstre og for at kula skal rotasjonsakselerere fra stille til rotasjon mot klokka, må friksjonskrafta F_f ha retning mot høyre. F_f og virker i kontaktpunktet mot underlaget. F må være større enn F_f for at kula skal få translasjonsakselerasjon mot venstre.
Med rotasjonsakselerasjon α og translasjonsakselerasjon a er ved rein rulling betingelsen $a = \alpha R$ oppfylt. F_f er stor nok til at grensa $F_{f,\max} = \mu_s$ ikke er nådd. Newton 2 for rotasjon:

$$\tau = F_f R = I\alpha = I\frac{a}{R}\,.$$



For de to kulene er treghetsmomentet $I = 2 \cdot \frac{2}{5}\frac{M}{2}R^2 = \frac{2}{5}MR^2$. Innsatt i N2:

$$F_f R = \frac{2}{5}MR^2\frac{a}{R} \qquad \Rightarrow \quad \underline{F_f = \frac{2}{5}Ma}\,.$$

Da $\sum F = Ma$, må fjærkrafta $F = \frac{7}{2}Ma$ mot venstre, altså er $F_f = \frac{2}{7}F = 0,29 \cdot F$.

c. Med F_f mot høyre som vist i figuren og fjærkraft mot venstre, blir Newton 2 for translasjonen

$$Ma = -kx + F_f\,.$$

Nå er i størrelse $F_f = \frac{2}{5}Ma$, men i høyre ytterstilling er a negativ og F_f mot høyre, slik at vi må sette inn $F_f = -\frac{2}{5}Ma$

$$M\ddot{x} = -kx - \frac{2}{5}M\ddot{x} = \qquad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{M} \cdot \frac{5}{7}x = 0,$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med $\omega = \sqrt{\frac{k}{M} \cdot \frac{5}{7}}$ og svingetid

$$\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \cdot \sqrt{\frac{7}{5}}} = T_0 \cdot \sqrt{\frac{7}{5}} = 0,444\,\mathrm{s} \cdot \sqrt{\frac{7}{5}} = \underline{0,526\,\mathrm{s}}.$$

d. Systemet svinger udempa: $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$ som gir en akselerasjon $a = \ddot{x}(t) = -x_0\omega^2 \sin(\omega t)$. Akselerasjonen er max (og kravet til friksjon størst) i ytterpunktene $x = x_0 = 0{,}10$ m:

$$|a_{\max}| = x_0\omega^2 = x_0 \cdot \frac{k}{M} \cdot \frac{5}{7} = 0,10\,\mathrm{m} \cdot \frac{200\,\mathrm{N/m}}{1,00\,\mathrm{kg}} \cdot \frac{5}{7} = 14,3\,\mathrm{m/s}^2.$$

Skal rotasjonsakselerasjonen følge med lineær akselerasjon må (fra oppgitt likning):

$$F_\mathrm{f} = \frac{2}{5}Ma = \frac{2}{5} \cdot 1,00\,\mathrm{kg} \cdot 14,3\,\mathrm{m/s}^2 = 5,72\,\mathrm{N}$$

Og med $F_\mathrm{f} = \mu_s Mg$ får vi grensetilfellet

$$\mu_s Mg = \frac{2}{5}Ma_{\max} \qquad \Rightarrow \qquad \mu_s = \frac{a_{\max}}{g}\frac{2}{5} = \frac{14,3}{9,81} \cdot \frac{2}{5} = \underline{0,58}.$$

Kontroll: I høyre ytterstilling er fjærkraft $= kx_0 = 200\,\mathrm{N/m} \cdot 0,10\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{N}$ mot venstre mens friksjonskraft (funnet over) $F_\mathrm{f} = 5{,}72$ N mot høyre. Dette gir lineær akselerasjon $|a| = \frac{\sum F}{M} = \frac{kx_0 - F_\mathrm{f}}{M} = \frac{14,3\,\mathrm{N}}{1,00\,\mathrm{kg}} = 14,3\,\mathrm{m/s}^2$, som stemmer.

A. Mi. 9. aug. 2011