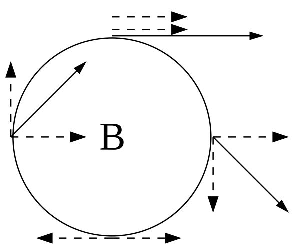
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

EKSAMEN I FY1001 og TFY4145 MEKANISK FYSIKK: LØSNINGSFORSLAG

Fredag 16. desember 2011 kl. 0900 - 1300

Oppgave 1. Ti flervalgsspørsmål (teller $2.5 \times 10 = 25$ %)

a. B.



Ved ren rulling er $v = \omega r$, slik at en tangentiell hastighet ωr kommer i tillegg til hjulets translasjonshastighet over alt.

b. C. Graf 4 er åpenbart mulig: Klossen glir oppover med konstant (negativ) akselerasjon og blir liggende i ro dersom friksjonen mot underlaget er stor nok. Alternativt glir den ned igjen, igjen med konstant akselerasjon, men nå med *mindre* akselerasjon, siden både friksjonskraften og tyngdens komponent tangentielt med skråplanet virker mot bevegelsen. Dermed er også graf 2 en mulighet.

c. D. Mekanisk energi er bevart, så hastigheten er mindre på toppen enn ved bunnen. Dette er nok til å fastslå at D er riktig figur, siden sentripetalakselerasjonen er v^2/r. På høyre og venstre side har vi i tillegg baneakselerasjonen g rettet nedover, som gir total akselerasjon på skrå nedover og inn mot midten.

d. C. Hvis kinetisk energi er $3mgr/2$ på toppen, er kinetisk energi lik $3mgr/2 + 2mgr = 7mgr/2$ ved bunnen, siden mekanisk energi her er bevart. Dermed er sentripetalakselerasjonen $v^2/r = 7g$ ved bunnen, total kraft er $7mg$ rettet oppover, og normalkraften er $7mg + mg = 8mg$.

e. A. N2 gir for sirkelbevegelse $GmM/r^2 = mv^2/r$, dvs $K = mv^2/2 = mMG/2r$. Fra formelarket har vi $U = -mMG/r$, slik at $E = K + U = mMG/2r - mMG/r = -mMG/2r = -K = U/2$.

f. A. Banedreieimpulsen er $L_b = mrv$, der r er avstanden til sola, $v = \omega_a r$ er hastigheten i banen, og $\omega_a = 2\pi/T_a$ med $T_a = 365$ døgn. Spinnet er (se oppg 3d) $L_s = I_0\omega_d \simeq 0.3mR^2\omega_d$, der R er jordas radius og $\omega_d = 2\pi/T_d$ med $T_d = 1$ døgn. Forholdet mellom disse to blir

$$\frac{L_b}{L_s} = \frac{r^2 T_d}{0.3R^2 T_a} = \frac{(150 \cdot 10^6)^2 \cdot 1}{0.3 \cdot (6.4 \cdot 10^3)^2 \cdot 365} \simeq 5 \cdot 10^6.$$

g. B. Vi har statisk likevekt, og dermed $G = f + S/\sqrt{2}$ (kraftbalanse vertikalt), $N = S/\sqrt{2}$ (kraftbalanse horisontalt) og $fR = NR$ (dreiemomentbalanse om toppen av ballen). Her er f friksjonskraften, N er normalkraften og S er snordraget. Den siste av disse gir $f = N$, hvoretter ligning nr to gir $f = S/\sqrt{2}$. Innsatt i ligning nr en gir dette til slutt $G = S/\sqrt{2} + S/\sqrt{2} = 2S/\sqrt{2} = \sqrt{2}S$, dvs $S = G/\sqrt{2}$.

h. C. A er $\Delta x/\Delta t$, dvs v_x, mens B er $\Delta y/\Delta t$, dvs v_y, slik at C $= v^2$. Videre ser vi at D $= r$, og følgelig blir E $= v^2/r$, dvs sentripetalakselerasjonen.

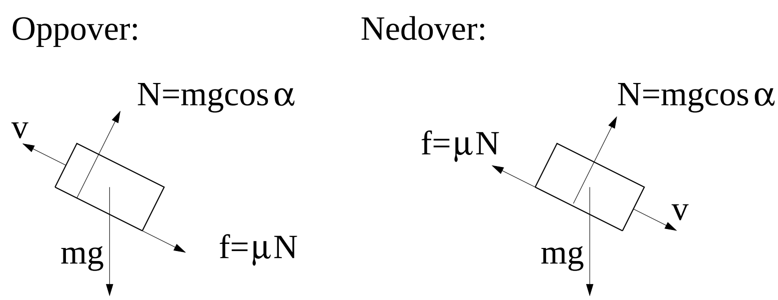
i. D. Se øving 13, og formler på formelarket.

j. D. Uttrykket for $A(\omega)$ er gitt i formelvedlegget. Innsetting av hhv $\omega = \omega_0$ og $\omega = 0$ gir $A(\omega_0) = (F_0/m)/(b\omega_0/m) = F_0/b\omega_0$ og $A(0) = (F_0/m)/\omega_0^2$ slik at

$$A(\omega_0)/A(0) = m\omega_0^2/b\omega_0 = m\omega_0/b = m\sqrt{k/m}/b = \sqrt{km}/b.$$

Oppgave 2. Skråplan med friksjon (teller 20 %: 5+5+5+5)

a. Tre krefter virker på kassen: tyngdekraften mg, friksjonskraften $f = \mu N$, og normalkraften $N = mg\cos\alpha$ (der verdien av N bestemmes ved at N må balansere tyngdens komponent normalt på skråplanet). Tyngdekraften angriper i tyngdepunktet, midt i kassen. Friksjonskraften angriper i flaten mellom kasse og skråplan og har retning parallelt med skråplanet, mot kassens bevegelse. Normalkraften angriper også i flaten mellom kasse og skråplan, og lenger opp jo større kassens akselerasjon nedover skråplanet er:



Hvis kassen beveger seg med konstant hastighet nedover skråplanet, vil resulterende normalkraft angripe nøyaktig der hvor tyngdekraftvektoren passerer skråplanet, slik at netto dreiemoment på kassen relativt normalkraftens angrepspunkt (eller relativt et hvilket som helst annet punkt) blir lik null.

b. Total energi tilsvarer kinetisk energi i starten:

$$E_i = K_i = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Kassen stopper i høyden $h = L\sin\alpha$ med null hastighet, og har da mistet mekanisk energi tilsvarende friksjonsarbeidet

$$W_f = fL = \mu NL = \mu mgL\cos\alpha,$$

slik at

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL\sin\alpha + \mu mgL\cos\alpha,$$

dvs

$$L = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

Med flatt skråplan uten friksjon vil kassen gli uendelig langt, noe som stemmer bra med uttrykket for L, siden $\alpha = \mu = 0$ gjør at nevneren blir lik null.

c. Fra forrige punkt har vi

$$W_f = \mu mgL\cos\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 \cdot \frac{\mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = E_i \cdot \left(1 + \frac{\tan\alpha}{\mu}\right)^{-1}.$$

Kommentarer: For store verdier av μ blir $W_f/E_i \simeq 1$. Rimelig: Kassen kommer seg ikke særlig langt, og praktisk talt all mekanisk energi går tapt. For små verdier av μ blir $W_f/E_i \simeq 0$. Også rimelig: Kassen glir langt, og veldig lite mekanisk energi går tapt. Det er $\tan\alpha$ som her avgjør om μ er liten eller stor: Stor μ betyr $\mu \gg \tan\alpha$ og liten μ betyr $\mu \ll \tan\alpha$.

d. Nå er total energi lik potensiell energi på toppen:

$$U_i = mgL\sin\alpha.$$

Vi mister nøyaktig like mye mekanisk energi pga friksjon på vei ned som på vei opp, siden strekningen L er den samme. Dermed blir slutthastigheten v_1 bestemt av

$$mgL\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_1^2 + \mu mgL\cos\alpha,$$

dvs

$$v_1^2 = 2gL\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

Hvis $\mu > \tan\alpha$, blir høyresiden negativ, men v_1^2 kan ikke bli negativ. Da er friksjonen tilstrekkelig stor til at kassen blir liggende i ro på toppen. Uttrykket for v_1 er altså kun gyldig hvis $\mu < \tan\alpha$.
Innsetting av L fra punkt **b** gir

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}}.$$

Oppgave 3. Jordas treghetsmoment (teller 15 %: 2+5+5+3)

a. Fra figuren ser vi at $\rho(R) = \rho_0/4$, som betyr at $\alpha = 3/4$.

b. Et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr har volum $dV = 4\pi r^2 dr$ (oppgitt), og følgelig masse $dm = \rho(r)dV = \rho_0(1 - 3r/4R) \cdot 4\pi r^2 dr$. Hele jordas masse bestemmes ved å legge sammen massene til slike tynne kuleskall, fra innerst ($r = 0$) til ytterst ($r = R$):

$$\begin{aligned} M &= \int dm = \int_0^R \rho_0\left(1 - 3r/4R\right) \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi\rho_0 \Big|_0^R \left(\frac{r^3}{3} - \frac{3r^4}{16R}\right) \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{16R^3}{48} - \frac{9R^3}{48}\right) \\ &= \frac{7\pi}{12}\rho_0 R^3. \end{aligned}$$

Altså er $\beta = 7\pi/12$.

c. Et tynt kuleskall med radius r og masse dm har treghetsmoment $dI_0 = 2\,dm\,r^2/3$ (oppgitt). Hele jordas treghetmoment bestemmes ved å legge sammen treghetsmomentene til slike tynne kuleskall:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int dI_0 = \int_0^R 2\rho_0\,(1 - 3r/4R)\cdot 4\pi r^2 \cdot r^2/3\,dr \\
&= \frac{8\pi\rho_0}{3}\bigg|_0^R \left(\frac{r^5}{5} - \frac{3r^6}{24R}\right) \\
&= \frac{8\pi\rho_0}{3}\left(\frac{8R^5}{40} - \frac{5R^5}{40}\right) \\
&= \frac{\pi}{5}\,\rho_0 R^5 \\
&= \frac{\pi}{5}\cdot\frac{12}{7\pi}\cdot\frac{7\pi}{12}\,\rho_0 R^3\cdot R^2 \\
&= \frac{12}{35}MR^2.
\end{aligned}$$

Altså er $\gamma = 12/35$.

d. Med $\rho_0 = 12.6$ g/cm^3 $= 12600$ kg/m^3 og $R = 6.37\cdot 10^6$ m:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{7\pi}{12}\cdot 12600\cdot\left(6.37\cdot 10^6\right)^3 = 5.97\cdot 10^{24}\text{ kg}, \\
I_0 &= \frac{12}{35}\cdot 5.97\cdot 10^{24}\cdot\left(6.37\cdot 10^6\right)^2 = 8.30\cdot 10^{37}\text{ kgm}^2.
\end{aligned}$$

(Med $\beta = 1.8$ og $\gamma = 0.3$ blir $M = 5.9\cdot 10^{24}$ kg og $I_0 = 7.1\cdot 10^{37}$ kgm^2.)

Oppgave 4. Hastighetsmåling (teller 20 %: 5+7+8)

a. Når kula kolliderer uelastisk på skivas overflate, vil det virke en ytre kraft på skiva fra akslingen. Hvis akslingen ikke var der og holdt skivas sentrum i ro, kunne vi ha benyttet prinsippet om impulsbevarelse for systemet skive + kule. Kraftstøtet fra akslingen på skiva resulterer i at systemets impuls ikke er bevart i kollisjonen mellom kula og skiva. Prinsippet om energibevarelse kunne vi uansett ikke ha benyttet, selv uten akslingen til stede, siden kollisjonen mellom kula og skiva er (fullstendig) uelastisk.
Kraften fra akslingen på skiva angriper i skivas sentrum og har dermed ingen arm mhp skivas sentrum. Så selv om det virker en ytre *kraft* på systemet i kollisjonen, virker det ikke noe ytre *dreiemoment relativt skivas sentrum*. Dermed er systemets dreieimpuls relativt skivas sentrum bevart.

b. La oss velge origo i skivas sentrum, positiv y-akse mot høyre og positiv x-akse oppover. Positiv z-akse er dermed inn i papirplanet. Før kollisjonen har kula (og dermed systemet, siden skiva er i ro) dreieimpulsen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_i &= \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} \\
&= (x\hat{x} + y(t)\hat{y})\times mv\hat{y} \\
&= xmv\hat{z}
\end{aligned}$$

Etter kollisjonen roterer skiva og kula som ett stivt legeme omkring z-aksen, med vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$. Systemets treghetsmoment mhp rotasjonsaksen er

$$I = I_{\text{skive}} + I_{\text{kule}} = \frac{1}{2}MR^2 + mx^2,$$

slik at systemets dreieimpuls etter kollisjonen er

$$\boldsymbol{L}_f = I\boldsymbol{\omega} = \omega\left(\frac{1}{2}MR^2 + mx^2\right)\hat{z}.$$

Ved å sette $L_i = L_f$ finner vi kulas hastighet

$$v = \frac{\omega(MR^2 + 2mx^2)}{2mx}.$$

Ser vi på de oppgitte tallverdiene, usikkerhetene inkludert, finner vi at leddet $2mx^2$ trygt kan neglisjeres relativt leddet MR^2, siden

$$\frac{2mx^2}{MR^2} = \frac{2 \cdot 20.0 \cdot 5.0^2}{10000 \cdot 10.00^2} = 0.001,$$

dvs betydelig mindre enn den relative usikkerheten i de minst nøyaktig målte størrelsene x og ω: $\Delta x/x = 0.02$ og $\Delta\omega/\omega = 0.01$. Vi konkluderer derfor med at kulas hastighet er

$$v = \frac{\omega MR^2}{2mx}.$$

__c__. Alle fem målte størrelser inngår som enkle potenser i uttrykket for v. Det er derfor enkelt å bestemme de ulike bidragene til den relative usikkerheten i v. La oss ta bidraget pga usikkerheten i R som et eksempel (der vi benytter Gauss' feilforplantningslov fra formelarket):

$$\frac{\partial v}{\partial R}\Delta R = \frac{\omega MR}{mx}\Delta R = \frac{2v}{R}\Delta R = v\frac{2\Delta R}{R}.$$

Tilsvarende beregning med ω, M, m og x gir

$$\frac{\Delta v}{v} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2}.$$

Relativ usikkerhet i målte størrelser er

$$\frac{\Delta R}{R} = 0.001 \quad , \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} = 0.01 \quad , \quad \frac{\Delta M}{M} = 0.0001 \quad , \quad \frac{\Delta m}{m} = 0.005 \quad , \quad \frac{\Delta x}{x} = 0.02.$$

Siden disse skal kvadreres før de legges sammen, kan vi her nøye oss med å ta med bidragene som skyldes usikkerhet i x og ω, og vi finner

$$\frac{\Delta v}{v} = \sqrt{0.02^2 + 0.01^2} = 0.022,$$

mens

$$v = \frac{1.00 \cdot 10.000 \cdot 0.1000^2}{2 \cdot 0.0200 \cdot 0.050} = 50.0\,\mathrm{m/s}.$$

Absolutt usikkerhet i v blir

$$\Delta v = 0.022 \cdot 50.0\,\mathrm{m/s} = 1.1\,\mathrm{m/s} \simeq 1\,\mathrm{m/s},$$

så kulas hastighet med usikkerhet er

$$v = (50 \pm 1)\,\mathrm{m/s}.$$

Oppgave 5. Jakt på Nordpolen. (teller 20 %: 4+10+6)

a. Corioliskraften: $F_C = |2m\boldsymbol{u}_0 \times \boldsymbol{\omega}| = 2 \cdot 0.020 \cdot 800 \cdot 2\pi/86400 = 0.0023$ N. (1 døgn $= 24 \cdot 3600 = 86400$ s.) Tyngdekraften: $G = mg = 0.020 \cdot 9.81 = 0.20$ N. Luftmotstanden: $f = bu_0^2 = 5.4 \cdot 10^{-5} \cdot 800^2 = 35$ N. På Nordpolen er avstanden til rotasjonsaksen $\rho' = 0$, så her er det ingen sentrifugalkrefter.

b. Newtons andre lov, $f = ma$, blir med $f = -bu^2$ og $a = du/dt$,

$$-bu^2 = m\frac{du}{dt}.$$

Denne kan omskrives og integreres:

$$-\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{u^2} = \frac{b}{m}\int_0^t dt.$$

Integralet av $-1/u^2$ er $1/u$, og vi får

$$\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{u_0} = \frac{bt}{m}.$$

Løsning mhp $u(t)$ gir

$$u(t) = \frac{u_0}{1 + (bu_0/m)t}.$$

Følgelig er $\alpha = bu_0/m$, en størrelse med enhet 1/s, og her med tallverdi $5.4 \cdot 10^{-5} \cdot 800/0.020 = 2.16$. Med hastighet $u(t)$ ved tidspunktet t tilbakelegger prosjektilet distansen $ds = u(t)dt$ mellom t og $t + dt$. Tiden τ det tar for prosjektilet å tilbakelegge distansen L må derfor være bestemt av ligningen

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\tau u(t)dt = \int_0^\tau \frac{u_0 dt}{1 + (bu_0/m)t} \\ &= \Big|_0^\tau \frac{m}{b}\ln\left(1 + \frac{bu_0}{m}t\right) \\ &= \frac{m}{b}\ln\left(1 + \frac{bu_0}{m}\tau\right) \end{aligned}$$

Vi ganger på begge sider med b/m, eksponentierer på begge sider, løser mhp τ og finner

$$\tau = \frac{m}{bu_0}\left(e^{bL/m} - 1\right),$$

eventuelt

$$\tau = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha L/u_0} - 1\right).$$

c. Med $L = 150$ m, $\alpha = 2.16\ \mathrm{s}^{-1}$ (regnet ut ovenfor) og $u_0 = 800$ m/s finner vi at det tar prosjektilet $\tau = 0.231$ s å nå fram til målet. På denne tiden faller prosjektilet

$$\Delta z = \frac{1}{2}g\tau^2 = 0.26\,\mathrm{m}.$$

I løpet av tiden τ har jorda rotert en liten vinkel $\theta = \omega\tau$, og målet i avstand L har flyttet seg (bue-)lengden

$$\Delta x = L\theta = L\omega\tau = 150 \cdot (2\pi/86400) \cdot 0.231\,\mathrm{m} \simeq 2.5\,\mathrm{mm}$$

mot venstre. For oss vil dette oppleves som om prosjektilet har blitt avbøyd 2.5 mm mot høyre.
En vanskeligere måte å bestemme Δx på baserer seg på å anslå en gjennomsnittlig coriolisakselerasjon langs prosjektilets bane. Vi anslår først en gjennomsnittshastighet for prosjektilet:

$$\langle u\rangle \simeq \frac{1}{2}\left(u(\tau) + u(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_0}{1 + \alpha\tau} + u_0\right) \simeq \frac{1}{2}u_0 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5u_0}{6} = 667\,\mathrm{m/s}.$$

Deretter bruker vi $\langle u \rangle$ som utgangspunkt for å anslå en omtrentlig konstant coriolisakselerasjon langs hele banen:

$$\langle a_C \rangle = 2\langle u \rangle \omega = \frac{5}{3} u_0 \omega.$$

Avbøyningen mot høyre blir dermed omtrentlig

$$\Delta x \simeq \frac{1}{2} \langle a_C \rangle \tau^2 = \frac{5}{6} u_0 \omega \tau^2 = 2.6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 2.6\,\mathrm{mm},$$

dvs praktisk talt det samme som ovenfor. (Den oppgitte omtrentlige verdien $\alpha = 13/6 = 2.17$ er så nær den korrekte verdien 2.16 at alle tallsvar blir essensielt uendret.)
Beregnede verdier for Δz og Δx kan gi grunnlag for å legge siktepunktet en tanke høyt, for å kompensere for prosjektilets fall i tyngdefeltet. Men avbøyningen pga jordrotasjonen (corioliskraften) kan vi trygt se bort fra.