NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

EKSAMEN I FY1001 og TFY4145 MEKANISK FYSIKK: LØSNINGSFORSLAG

Mandag 6. august 2012 kl. 0900 - 1300

Oppgave 1. Ti flervalgsspørsmål (teller 2.5 × 10 = 25%)

a. A. Bruk Steiners sats, $I_1 = I_2 = I_0 + Md^2$ med $d = R_1 = R_2$.

b. D. Normalt på skråplanet har tyngden komponent $mg\cos\theta$ og kraften F komponent $F\sin\theta$, begge i samme retning. N1 normalt på skråplanet gir at normalkraften må være lik summen av disse.

c. A. Når flasken står i ro, gir Newtons 1. lov $N = mg$.

d. B. De to kassene har samme hastighet v og samme akselerasjon a. Newtons 2. lov gir da $F = 2ma$ og $S = ma$, dvs $S = F/2$.

e. A. Konstant hastighet betyr null akselerasjon. Dermed null horisontal kraft på øvre kasse, dvs null friksjonskraft fra nedre på øvre kasse, ettersom dette er eneste potensielle horisontale kraft på øvre kasse.

f. D. Som sagt, konstant fart betyr null akselerasjon og null nettokraft på nedre kasse. Dermed må friksjonskraften være lik trekk-kraften F (men motsatt rettet, selvsagt).

g. B. Bruk Gauss' feilforplantningslov på uttrykket for kinetisk energi, $K(m,v) = mv^2/2$.

h. C. A og B er fart i hhv x- og y-retning. Tangens til C er x/y, dvs C tilsvarer vinkelen mellom x-aksen og legemets posisjonsvektor, dvs polarvinkelen ϕ. D er lengden av posisjonsvektoren, dvs R. E er farten v. Dermed blir F lik Rv. Her er dreieimpulsen mhp origo lik $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{p}$, med $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ impulsen. Følgelig blir F lik dreieimpulsen dividert med massen m, dvs dreieimpuls pr masseenhet.

i. D. Impulsbevarelse (pga ingen ytre krefter) gir $mv_1 = 5mv_5$, dvs $v_1 = 5v_5$. Dermed:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 5 \cdot \frac{1}{2}(5m)v_5^2 = 5K_5,$$

dvs K_1 utgjør 5/6 av total kinetisk energi, omlag 83%.

j. B. En bordtennisball har vel masse omkring 1 g og radius omkring 1 cm. Dermed:

$$I \sim mR^2 \sim 10^{-7}\ \mathrm{kg\,m^2}.$$

Ti rette er altså: **A D A B A D B C D B**.

Oppgave 2. (teller 30 %: 5+8+12+5)

a. Et lite masseelement $dA = r\,d\phi\,dr$ har masse $dm = \sigma\,dA$. Skivas masse blir derfor

$$M = \int dm = \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=-\alpha}^{\alpha} \sigma\, r d\phi\, dr = \sigma \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\alpha = \sigma\alpha R^2.$$

b. Ser uten videre at $Y_{CM} = 0$ pga symmetri mhp x-aksen. Videre:

$$\begin{aligned} X_{CM} &= \frac{1}{M} \int x\,\sigma\, dA = \frac{\sigma}{M} \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=-\alpha}^{\alpha} r\cos\phi\, r d\phi\, dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2} \cdot \frac{R^3}{3} \cdot (\sin\alpha - \sin(-\alpha)) = \frac{2R}{3} \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

$\alpha = \pi$ tilsvarer sirkulær skive, noe som bør gi $X_{CM} = 0$, noe som stemmer. I grensen $\alpha \to 0$ kan vi sette $\sin\alpha = \alpha$, og vi får $X_{CM} = 2R/3$. Er dette rimelig? Ja: For liten vinkel α er skiva med god tilnærmelse en likebeint trekant med "høyde" R (i x-retning) og utspent vinkel 2α. Vi kan da velge små flateelementer $dA = dx \cdot (y_+ - y_-)$, der øvre grense er den rette kurven $y_+(x) = cx$ og nedre grense er den rette kurven $y_-(x) = -cx$ (der c er en konstant som enkelt kan bestemmes, men som vil forkortes bort om et øyeblikk), slik at $dA = 2c\,x\,dx$. Dermed:

$$X_{CM} = \frac{\int x\,\sigma\,dA}{\int \sigma\,dA} = \frac{\int x \cdot 2cx\,dx}{\int 2cx\,dx} = \frac{\int x^2\,dx}{\int x\,dx} = \frac{R^3/3}{R^2/2} = \frac{2R}{3}.$$

Altså rimelig resultat i grensen $\alpha \to 0$.

c. La ρ angi avstanden fra flateelementet til den aktuelle aksen som vi skal bestemme treghetsmomentet omkring. Da er $I_x = \int \rho^2\,dm$ med $\rho = y = r\sin\phi$. Dermed:

$$I_x = \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=-\alpha}^{\alpha} (r\sin\phi)^2 \sigma\, r d\phi\, dr = \sigma \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \int_{\phi=-\alpha}^{\alpha} \sin^2\phi\, d\phi.$$

Basert på de oppgitte trigonometriske sammenhengene utleder vi at $\sin^2\phi = 1/2 - (1/2)\cos 2\phi$, som gjør integralet enkelt:

$$\int_{\phi=-\alpha}^{\alpha} \sin^2\phi\, d\phi = \alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

der vi har brukt at $\sin(-x) = -\sin x$. Alt i alt:

$$I_x = \frac{\sigma R^4}{4}(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha).$$

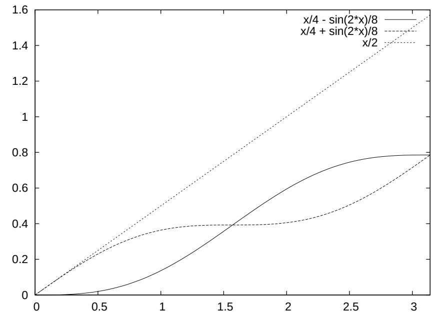
På tilsvarende vis er $I_y = \int \rho^2\,dm$ med $\rho = x = r\cos\phi$. Igjen, basert på de oppgitte sammenhenger, utleder vi $\cos^2\phi = 1/2 + (1/2)\cos 2\phi$, så eneste forskjell mellom I_x og I_y blir fortegnet på det siste leddet, dvs:

$$I_y = \frac{\sigma R^4}{4}(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha).$$

Endelig har vi $I_z = \int \rho^2\,dm$, med $\rho = r$. Da blir integralet over vinkelen ϕ ganske enkelt lik 2α, slik at

$$I_z = \frac{\sigma R^4}{4} \cdot 2\alpha.$$

Vi har da at $f(\alpha) = \alpha/4 - (1/8)\sin 2\alpha$, $g(\alpha) = \alpha/4 + (1/8)\sin 2\alpha$, mens $h(\alpha) = \alpha/2$:



d. Med en liten vinkel α er det rimelig at $I_y > I_x$, siden brorparten av massen ligger langt unna y-aksen, men ikke langt unna x-aksen. Med $\alpha = \pi/2$ har vi en halvsirkelformet skive. Hver kvartsirkelskive bidrar like mye til I, enten det er mhp rotasjon om x- eller y-aksen. Følgelig må $I_x = I_y$. Med $\alpha = \pi$ har vi ei sirkulær skive, og det er opplagt at $I_x = I_y$.

Oppgave 3. (teller 15 %: 5+10)

a. Siden kollisjonen er uelastisk, er mekanisk energi ikke bevart. Det virker ingen ytre krefter på skivene i kollisjonen. Følgelig er både $\boldsymbol{p}$ og $\boldsymbol{L}$ bevarte størrelser.

b. Translasjonsenergi før og etter kollisjonen er hhv

$$E_i^{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \text{og} \quad E_f^{\text{trans}} = \frac{1}{2}m(v_1')^2 + \frac{1}{2}m(v_2')^2.$$

Impulsbevarelse gir

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v'}_1 + \boldsymbol{v'}_2,$$

der vi har forkortet en felles faktor m. Vi bruker tipset og kvadrerer denne:

$$v_1^2 = (v_1')^2 + (v_2')^2 + 2\boldsymbol{v'}_1 \cdot \boldsymbol{v'}_2.$$

Vi ganger denne med $m/2$ og får

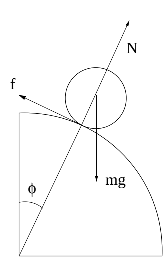
$$E_i^{\text{trans}} = E_f^{\text{trans}} + m\boldsymbol{v'}_1 \cdot \boldsymbol{v'}_2.$$

Det betyr at endringen i kinetisk translasjonsenergi blir

$$\Delta E^{\text{trans}} = E_f^{\text{trans}} - E_i^{\text{trans}} = -m\boldsymbol{v'}_1 \cdot \boldsymbol{v'}_2 = -mv_1'v_2' \cos\theta.$$

Dette viser at translasjonsenergien øker hvis $\cos\theta$ er negativ, dvs hvis $\theta > \pi/2$ (eller $\theta < -\pi/2$). Siden vi mister mekanisk energi i kollisjonen, er vi avhengig av kinetisk rotasjonsenergi før kollisjonen for at translasjonsenergien skal kunne øke.

Oppgave 4. (teller 30 %: 5+5+10+10)



a. Tre krefter virker på det rullende legemet: Tyngdekraften mg, normalkraften fra underlaget N, og friksjonskraften fra underlaget f (se figur til venstre).

b. Med ren rulling har vi $v = \omega r$. Legemets tyngdepunkt følger en sirkelbane med radius $R + r$, og vinkelhastigheten for tyngdepunktbevegelsen er $d\phi/dt$. Dermed har vi sammenhengen $v = (R + r)d\phi/dt$.

c. N2 langs sirkelbanen:

$$mg\sin\phi - f = m\frac{dv}{dt} = m(R+r)\frac{d^2\phi}{dt^2}.$$

N2 normalt sirkelbanen:

$$mg\cos\phi - N = m\frac{v^2}{R+r}.$$

N2 for legemets rotasjon omkring tyngdepunktet ($\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$, $\tau = rf$, $\boldsymbol{L} = I_0\boldsymbol{\omega}$, $I_0 = cmr^2$):

$$rf = I_0\frac{d\omega}{dt} = cmr^2\frac{1}{r}\frac{dv}{dt} = cmr(R+r)\frac{d^2\phi}{dt^2}.$$

Vi setter det siste uttrykket for friksjonskraften f inn i N2 langs sirkelbanen, ordner og får

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \frac{g}{(c+1)(R+r)}\sin\phi = 0.$$

Sammenligning med det oppgitte uttrykket viser at

$$\Omega^2 = \frac{g}{(c+1)(R+r)}.$$

Enheten til g er m/s^2, $c+1$ er dimensjonsløs, mens $R+r$ har enhet m. Følgelig er enheten til Ω 1/s, som stemmer, ettersom det første leddet i ligningen for ϕ har enheten til 1 over tid kvadrert.

d. Vi skal vise at den oppgitte $\phi(t)$ er løsning av ligningen

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \Omega^2\phi = 0.$$

Vi deriverer den gitte ϕ to ganger:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \Omega A\sinh\Omega t + \Omega B\cosh\Omega t\\ \frac{d^2\phi}{dt^2} &= \Omega^2 A\cosh\Omega t + \Omega^2 B\sinh\Omega t = \Omega^2\phi\end{aligned}$$

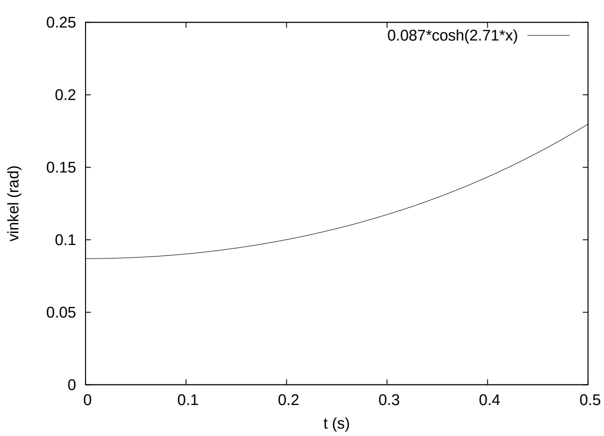
Dermed ser vi at den gitte ϕ løser (den tilnærmede) ligningen.
Initialbetingelsene er gitt i starten av oppgaven: $\phi(0) = \phi_0$ og $\dot{\phi}(0) = 0$. Siden $\cosh(0) = 1$ og $\sinh(0) = 0$, har vi

$$\phi_0 = A \quad , \quad 0 = \Omega B,$$

dvs $B = 0$. Den fullstendige løsningen for små verdier av ϕ er dermed

$$\phi(t) = \phi_0\cosh\Omega t.$$

Dette tidsforløpet ser slik ut:



Her er det valgt tallverdier som er representative for en bordtennisball (kuleskall, $c = 2/3$) med radius 1 cm, og som ruller på en sirkelbane med radius 79 cm. Startvinkelen er 5 grader, dvs 0.087 radianer. (Tilnærmelsen $\sin\phi \simeq \phi$ holder med 2 siffers nøyaktighet opp til ca 0.3 radianer, dvs ca 17 grader.)