NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

EKSAMEN I FY1001 og TFY4145 MEKANISK FYSIKK: LØSNINGSFORSLAG

Tirsdag 18. desember 2012 kl. 0900 - 1300

Oppgave 1. Ti flervalgsspørsmål. (Teller 25%)

a. B. N3 gir $\boldsymbol{F}_{SP} = -\boldsymbol{F}_{PS}$, og vi vet at retningen er langs linjen mellom de to legemenes massesentre.

b. A. Med $\boldsymbol{v}$ = konstant gir N1 at $\sum_i \boldsymbol{F}_i = 0$.

c. C. Impulsbevarelse gir $2mv_0 = 5mv$, dvs $v = 2v_0/5$. Energitapet er dermed $K_0 - K = (1/2)2mv_0^2 - (1/2)5m(2v_0/5)^2 = 3mv_0^2/5$.

d. C. Bruker formel side 7 og finner:

$$\begin{aligned}
(\Delta K)^2 &= (\Delta m \partial K/\partial m)^2 + (\Delta v \partial K/\partial v)^2 \\
&= (\Delta m \cdot v^2/2)^2 + (\Delta v \cdot mv)^2 \\
&= (\Delta m \cdot K/m)^2 + (\Delta v \cdot 2K/v)^2 \\
&= K^2[(\Delta m/m)^2 + 4(\Delta v/v)^2]
\end{aligned}$$

e. A. Steiners sats gir

$$I_A = I_0 + m \cdot (l/2)^2 = (1/12 + 1/4)ml^2 = ml^2/3.$$

f. D. Tyngdekraften mg angriper i CM, "armens" lengde er $l/2$, og vinkelen mellom arm og kraft er θ. Dermed: $\tau_A = -(l/2)mg\sin\theta$, med bruk av definisjonen av kryssproduktet. (Negativ τ for resulterende rotasjon med klokka.)

g. C. $L_A = I_A\omega = (ml^2/3)\dot{\theta}$. (Merk at kun kombinasjonen A på pkt e og C på pkt g er mulig.)

h. A. Med rotasjon om den faste aksen A er kinetisk energi $K = (1/2)I_A\dot{\theta}^2$. Denne må tilsvare endringen i potensiell energi når stanga faller fra horisontal stilling til vinkelen θ. Da senkes CM en vertikal lengde $(l/2)\cos\theta$, slik at $-\Delta U = (mgl/2)\cos\theta$. Dermed: $(1/2)(ml^2/3)\dot{\theta}^2 = (mgl/2)\cos\theta$, dvs $\dot{\theta} = \sqrt{3g\cos\theta/l}$.

i. **C**. Fra forrige punkt har vi

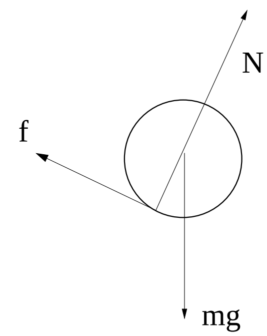
$$t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{3g\cos\theta/l}} = \sqrt{\frac{l}{3g}} \cdot 5.244 \simeq 3\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

j. **D**. På side 7 finner vi uttrykket for vinkelfrekvensen til en fysisk pendel med treghetsmoment I og avstand d fra festepunktet til CM. Her er $d = l/2$ og $I = I_A = ml^2/3$. Dermed:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgl/2}{I_A}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{8\pi^2 l}{3g}}.$$

Oppgave 2. Ren rulling. (Teller 35%)

a. Tre krefter virker på kula: tyngdekraften $G = mg$, friksjonskraften $f \leq \mu N$, og normalkraften $N = mg\cos\alpha$ (der verdien av N bestemmes ved at N må balansere tyngdens komponent normalt på skråplanet). Tyngdekraften angriper i tyngdepunktet, midt i kula. Friksjonskraften angriper i kontaktpunktet mellom kule og skråplan og har retning parallelt med og oppover skråplanet. (For å gi en økende vinkelhastighet som tilsvarer ren rulling nedover.) Normalkraften angriper også i kontaktpunktet mellom kule og skråplan.



b. Null akselerasjon normalt skråplanet gir $N = mg\cos(\pi/4) = mg/\sqrt{2}$.

c. Kula har redusert sin potensielle energi med mgR, som må tilsvare opparbeidet kinetisk energi:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_1^2.$$

Ren rulling betyr at $\omega_1 = v_1/r$, slik at

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{v_1^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv_1^2.$$

Dermed blir $v_1 = \sqrt{10gR/7}$.

d. N2 for translasjon nedover skråplanet:

$$G_{\|} - f = ma \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{\sqrt{2}} - f = ma.$$

N2 for rotasjon om kulas CM:

$$f \cdot r = I_0\dot{\omega} = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{\dot{v}}{r} = \frac{2}{5}mra.$$

Fra denne har vi $f = 2ma/5$, dvs $ma = 5f/2$, som innsatt i N2 for translasjon gir

$$\frac{mg}{\sqrt{2}} - f = \frac{5f}{2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\sqrt{2}}{7}mg.$$

e. Siden $f \leq \mu N$ har vi at $\sqrt{2}mg/7 \leq \mu mg/\sqrt{2}$, dvs $\mu \geq 2/7$.

f. Vi har sirkelbevegelse for kulas CM, dermed:

$$F_\perp = N - G_\perp = N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R-r}.$$

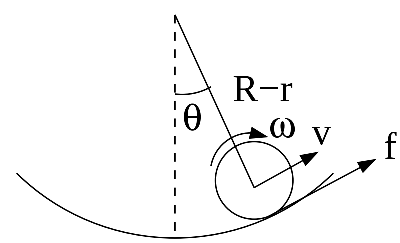
Vi bruker energibevarelse for å finne v^2 ved vinkelen θ:

$$\begin{aligned}
\Delta U &= U(\theta) - U_1 \\
&= mg(R-r)(1-\cos\theta) - mg(R-r)(1-\cos(\pi/4)) \\
&= mg(R-r)(1/\sqrt{2} - \cos\theta) < 0; \\
\Delta K + \Delta U &= 0; \\
\Rightarrow \Delta K &= K(\theta) - K_1 \\
&= \frac{7}{10}mv^2 - \frac{7}{10}mv_1^2 \\
&= -\Delta U = mg(R-r)(\cos\theta - 1/\sqrt{2}) \\
\Rightarrow v^2 &= v_1^2 + \frac{10}{7}g(R-r)(\cos\theta - 1/\sqrt{2}) \\
&= \frac{10}{7}g(R-r)(\cos\theta + R/(R-r) - 1/\sqrt{2}) \\
\Rightarrow N(\theta) &= mg\cos\theta + \frac{10}{7}mg(\cos\theta + R/(R-r) - 1/\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Eventuelt, med v_1:

$$N(\theta) = mg\cos\theta + \frac{mv_1^2}{R-r} + \frac{10}{7}mg(\cos\theta - 1/\sqrt{2}).$$

g. Når kula er på vei oppover mot høyre, avtar v og $\omega = v/r$, og dermed avtar også $\dot{\theta} = v/(R-r)$, dvs $\ddot{\theta} = \dot{v}/(R-r)$ er negativ. Med $\dot{\omega} < 0$ må f peke som i figuren:



Dermed har vi $fr = -I_0\dot{\omega}$ (N2, rotasjon om kulas CM). N2 langs sirkelbanen gir

$$f - mg\sin\theta = m\dot{v}.$$

Vi eliminerer f fra disse to ligningene. N2 for rotasjon om kulas CM gir

$$f = -\frac{1}{r}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\dot{\omega} = -\frac{2}{5}m\dot{v},$$

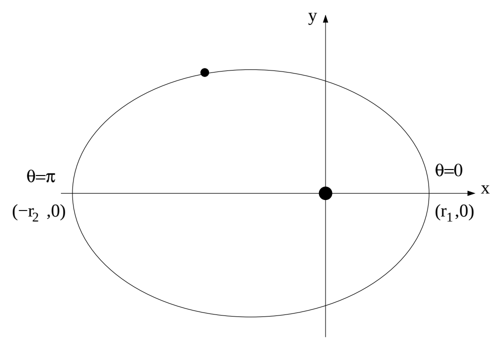
som innsatt i N2 langs sirkelbanen, sammen med tilnærmelsen $\sin\theta = \theta$, gir

$$\begin{aligned}
-mg\theta &= \frac{7}{5}m\dot{v} = \frac{7}{5}m\ddot{\theta}(R-r) \\
\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}\theta &= 0 \\
\Rightarrow \Omega &= \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3. Planetbane. (Teller 20%)

a. Gravitasjonskraften er konservativ, dermed er E bevart. Kraften er rettet langs forbindelseslinjen mellom m og M, dermed har kraften fra M på m ikke noe dreiemoment, og dreieimpulsen $\boldsymbol{L}$ er også bevart.

b.



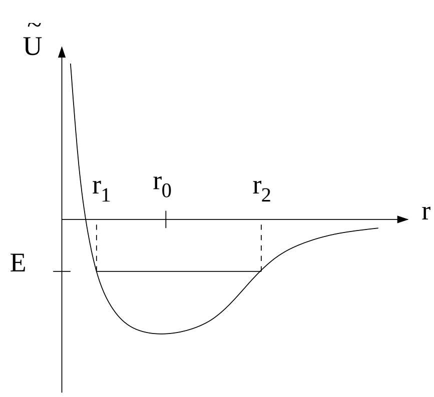
$$r_1 = \frac{r_0}{1+\varepsilon} \quad , \quad r_2 = \frac{r_0}{1-\varepsilon}.$$

c.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \\
\Rightarrow K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{L^2}{m^2r^4} \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \\
\Rightarrow E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{A}{r^2} - \frac{GMm}{r}
\end{aligned}$$

med $A = L^2/2m$.

d.



Funksjonen har minimum der den deriverte er lik null:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{U}}{dr} &= -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0 \\
\Rightarrow r(\tilde{U}_{\min}) &= \frac{L^2}{GMm^2} = r_0.
\end{aligned}$$

Oppgave 4. Numerikk. (Teller 10%)

Fra $\dot{r} = V(r)$ har vi $dr = V(r)dt$. Vi bestemmer først funksjonen $V(r)$:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2A}{mr^2} + \frac{2GM}{r}} = V(r).$$

Et fornuftig tidssteg dt vil være slik at halve ellipsen, fra $\theta = 0$ til $\theta = \pi$, dekkes med et antall tidssteg N, slik at $N \gg 1$ men samtidig slik at N ikke blir urimelig stor. Vi kjenner verken lengden av halve ellipsebanen, l, eller planetens typiske hastighet v langs banen, men vi kan gjøre noen rimelige overslag:
Ellipsen har utstrekning $2a = r_1 + r_2$ på tvers (i $x-$retning). Da er i hvert fall lengden av banen fra $\theta = 0$ til $\theta = \pi$ større enn $2a$, dvs $l > 2a$.
Videre har planeten minimal potensiell energi når den er nærmest sola, dvs i posisjonen $(r_1, 0)$. Det betyr at planeten har maksimal kinetisk energi, og dermed maksimal fart i denne posisjonen:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 - \frac{GMm}{r_1} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{GMm}{r_1}\right)}.$$

Til sammen betyr dette at planeten bruker minst en tid gitt ved $2a/v_{\text{max}}$ for å tilbakelegge halve ellipsebanen. Ved å velge et tidssteg f.eks. $dt = 0.0001 \cdot 2a/v_{\text{max}}$, vil derfor halve ellipsebanen være oppdelt i mer enn 10000 biter, noe som burde gi en rimelig grad av nøyaktighet.
Algoritmeforslag (der vi antar at alle konstanter allerede har fått sine verdier):

$dt = 0.0001 \cdot (r_1 + r_2)/\sqrt{2(E + GMm/r_1)/m}$
$r(1) = r_1$
$\theta(1) = 0$
$t(1) = 0$
$j = 1$
while $r(j) < r_2$:
  $V(j) = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2A}{mr(j)^2} + \frac{2GM}{r(j)}}$
  $r(j+1) = r(j) + V(j) \cdot dt$
  $\theta(j+1) = \arccos((r_0 - r(j+1))/(r(j+1)\varepsilon))$
  $t(j+1) = j\, dt$
  $j = j + 1$
tilbake til "while..."

Her er oppdateringen av r, θ og j inne i løkka det mest essensielle. (Kommentar: Ettersom $V(r_1) = 0$, risikerer vi her å bli stående fast i $r = r_1$, så vi burde nok ha satt $r(1)$ litt forskjellig fra r_1.)

Oppgave 5. Treghetsmoment. (Teller 10%)

$$\begin{aligned}
I_A &= \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2)\frac{M}{V}dV = \int (x^2 + y^2)\frac{M}{abL} a\, dx\, dy \\
&= \frac{M}{bL}\int_{x=0}^{L}\int_{y=0}^{b}(x^2 + y^2)\, dx\, dy \\
&= \frac{M}{bL}\left(\int_0^L x^2 dx \int_0^b dy + \int_0^L dx \int_0^b y^2 dy\right) \\
&= \frac{M}{bL}\left(\frac{L^3}{3}b + L\frac{b^3}{3}\right) \\
&= \frac{M}{3}\left(L^2 + b^2\right)
\end{aligned}$$