TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk
Eksamen 15. aug. 2014. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	E	C	C	B	A	D	C	A	B	E

Detaljer om spørsmålene:

a. E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover.

b. C. En massiv sylinder har $I = \frac{1}{2}mR^2$. Kin.energi er $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2(v/R)^2 = \frac{3}{4}mv^2$.

c. C. Når kulene henger sammen er dette et fullstendig uelastisk støt, og det vil tapes energi. Under en kollisjon uten ytre krefter er alltid p og L bevart (her er sammenhengen $L = \ell p$ for hver av kulene, der ℓ er snorlengden).

d. B. Fart til venstre kule *før* støt fra energibevarelse $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \;\Rightarrow\; v_1^2 = 2gh$. Med $v' =$ fellesfarten etter støtet gir bevaring av bevegelsesmengden: $mv_1 = 2mv'$. Energibevaring *etter* støtet gir: $2mgH = \frac{1}{2}(2m)\,v'^2$, som gir $H = \frac{1}{2}\frac{v'^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{4g} = \frac{1}{2}\frac{2gh}{4g} = \frac{h}{4}$.

e. A. Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinnet L er bevart.

f. D. Hastighet endrer retning, dermed også (sentripetal)akselerasjon mot senturm. Sum av krefter må virke mot sentrum og dermed $\vec{F} \perp \vec{v}$ og ingen arbeid gjøres.

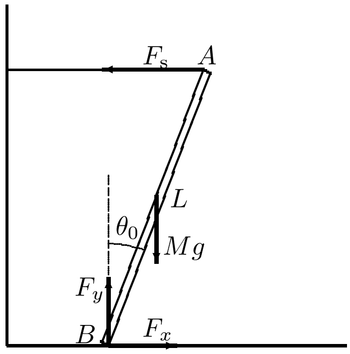
g. C. La L være bjelkens lengde. Med $G_B =$ tyngden til bjelken, $G =$ tyngden til lasten og $S =$ snorkrafta, gir momentbalanse om hengslingen ved veggen: $\frac{1}{2}L\,G_B + L\,G = L\,S\,\cdot \sin 30°$, som løst mhp S gir
$S = \dfrac{G_B + 2G}{2 \cdot \sin 30°} = \dfrac{100\,N + 2 \cdot 150\,N}{2 \cdot 0,500} = 400\,N.$

h. A. Treghetsmoment er: Hjul: MR^2, kuleskall: $\frac{2}{3}MR^2$, massiv kule: $\frac{2}{5}MR^2$. Sykkelhjulet med størst treghetsmoment får størst rotasjonsenergi og dermed mindre translasjonsenergi og minst fart v. Motsatt har massiv kule minst treghetsmomsnt og størst fart. Evt. utregnet:
Totalenergien ved enden (høydeforskjell h) er $E = Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$. For alle gjelder $v = \omega R$, slik at $E = Mgh = \frac{1}{2}(M + I/R^2)v^2$. Innsatt treghetsmoment I:
Hjulet: $Mgh = \frac{1}{2} \cdot (1+1)Mv^2$
Hule kula: $Mgh = \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{2}{3})Mv^2$
Massive kula: $Mgh = \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{2}{5})Mv^2$
M kan forkortes (altså uten betydning) og med samme h ser vi at hjulet får lavest translasjonshastighet v ved enden, mens den massive kula får høyest.

i. B. Kuben vil starte å gli når $mg\sin\theta > F_{\rm f,max} = \mu_{\rm s}F_{\rm N} = 0,65 \cdot mg\cos\theta$, altså ved $\theta = \arctan 0,65 = 33°$. Grensen for å tippe over er når massesenteret ligger rett over nedre kontaktpunkt (momentbalanse). For en kube (kvadratisk sidekant) skjer dette ved $\theta = 45°$.

j. E. $\dot{x}(t) = \frac{2\,\rm m}{\pi} \cdot 4\pi{\rm s}^{-1} \cdot \cos\left(4\pi{\rm s}^{-1}\,t + \frac{\pi}{6}\right)$ og ved t =2 s er denne $8\,{\rm m/s} \cdot \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 8\,{\rm m/s} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,{\rm m/s}$.

Oppgave 2.



a. I tillegg til kreftene tegnet på figuren i oppgaven virker tyngdekrafta Mg rett nedover midt på stanga. Likevekt i x- og y-retning gir

$$F_y = Mg \qquad \text{og} \qquad F_x = F_s$$

Videre har vi rotasjonslikevekt om punktet B:

$$Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\theta_0 = F_\mathrm{s} \cdot L\cos\theta_0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{F_\mathrm{s} = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan\theta_0}\,.$$

Da har vi bestemt F_s, og ergo blir

$$\underline{F_x = F_\mathrm{s} = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan\theta_0} \qquad \text{og} \qquad \underline{F_y = Mg}\,.$$

b. Fordi F_x utgjøres kun av friksjonen, må $F_x = \mu_\mathrm{s} F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{s} F_y = \mu_\mathrm{s} Mg$. Sammen med uttrykket for F_x over får vi da

$$\mu_\mathrm{s} Mg = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan\theta_0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\mu_\mathrm{s}} = \frac{\tan\theta_0}{2} = \frac{\tan 30^\circ}{2} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}} = \underline{0,289}\,.$$

Dette er minste verdien μ_s kan ha for at stanga ikke skal skli.

c. Vi bruker Steiners sats (parallellakseteoremet) til å finne I om endepunktet, som er i avstand $\frac{L}{2}$ fra tyngdepunktet:

$$I = I_\mathrm{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}ML^2}\,.$$

Kan også integrere, med $\mathrm{d}m = \mathrm{d}\ell \cdot M/L$:

$$I = \int_0^L \ell^2 \mathrm{d}\ell \cdot M/L = \frac{M}{L} \cdot \left[\frac{1}{3}\ell^3\right]_0^L = \underline{\frac{1}{3}ML^2}\,.$$

d. Newtons 2. lov for rotasjon:

$$\tau = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\theta = \frac{1}{3}ML^2 \cdot \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\alpha = \frac{g}{L} \cdot \frac{3}{2}\sin\theta}\,.$$

e. Bevegelsen kan sees på som rein rotasjon om B, slik at kin. energi er kun rotasjonsenergi $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2$. Energi ved θ_0 lik energi ved vilkårlig θ:

$$0 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}$$

Man vil kunne verifisere ved derivasjon at $\dot{\omega} = \alpha$.

Oppgave 3. Svingesystem

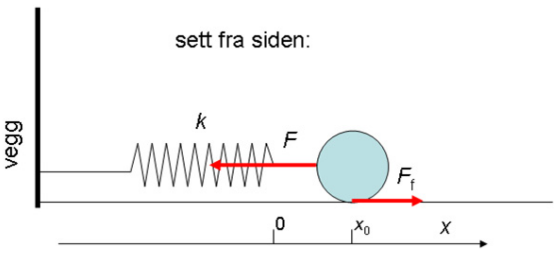
a. Fjærkrafta $F = -kx$ er positiv mot høyre (negativ for positiv x). Fjærkrafta gir en akselerasjon $a = \ddot{x}$. Newton 2 på akslingen med kuler (masse $2 \cdot M/2 = M$):

$$\sum F = M\ddot{x} = -kx, \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0,$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ og svingetid

$$\underline{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,00\,\mathrm{kg}}{200\,\mathrm{kg/s^2}}} = \underline{0,44\,\mathrm{s}}.$$

b. Fjærkrafta virker mot venstre og for at kula skal rotasjonsakselerere fra å være i ro til å rotere mot klokka, må friksjonskrafta $F_{\rm f}$ ha retning mot høyre. $F_{\rm f}$ virker i kontaktpunktet mot underlaget. F må være større enn $F_{\rm f}$ for at kula skal få translasjonsakselerasjon mot venstre.



c. Med $F_{\rm f}$ mot høyre som vist i figuren over og fjærkraft mot venstre, blir Newton 2 for translasjonen

$$Ma = -kx + F_{\rm f}\,.$$

Nå er i størrelse $F_{\rm f} = \frac{2}{5}Ma$ (oppgitt), men i høyre ytterstilling er a negativ og $F_{\rm f}$ mot høyre (positiv), slik at vi må sette inn $F_{\rm f} = -\frac{2}{5}Ma$ for å få rett fortegn. Dette gir

$$M\ddot{x} = -kx - \frac{2}{5}M\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{5}M\ddot{x} + kx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\ddot{x} + \frac{5}{7}\frac{k}{M}\,x = 0},$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med $\omega = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{k}{M}}$ og svingetid

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{7M}{5k}} = 2\pi\sqrt{\frac{7\cdot 1,00\,\mathrm{kg}}{5\cdot 200\,\mathrm{kg/s^2}}} = 0,526\,\mathrm{s} = \underline{0,53\,\mathrm{s}}.$$

Oppgave 4. Sirkelbevegelse

Akselerasjonen $\vec{a}$ består av tangentialakselerasjonen $a_{\rm t}$ parallelt med banen og sentripetalakselerasjonen $a_{\rm c}$ normalt på banen, slik at $\vec{a} = a_{\rm t}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - a_{\rm c}\,\hat{\mathbf{r}}$, der $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ og $\hat{\mathbf{r}}$ er enhetsvektorer langs banen og normalt (utoverretning) på banen. Sentripetalakselerasjonen $a_{\rm c} = v^2/r$, slik at når denne er bestemt finner vi farten.

Tangentialakselerasjonen er komponenten av $\vec{a}$ normalt på radiusvektor:

$$a_{\rm t} = |\vec{a}|\cdot\sin\theta = 18,0\,\mathrm{m/s^2}\cdot\sin 48,2^\circ = \underline{13,4\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

Sentripetalakselerasjonen er komponenten av $\vec{a}$ langs radiusvektor:

$$a_{\rm c} = |\vec{a}|\cdot\cos\theta = 18,0\,\mathrm{m/s^2}\cdot\cos 48,2^\circ = \underline{12,0\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

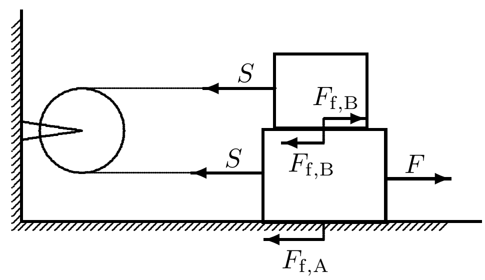
Fra $a_{\rm c} = v^2/r$ finner vi banefarten

$$v = \sqrt{a_{\rm c}\,r} = \sqrt{12,0\,\mathrm{m/s^2}\cdot 3,00\,\mathrm{m}} = \underline{6,00\,\mathrm{m/s}}\,.$$

Oppgave 5. Klosser

Figuren viser alle krefter i horisontal retning på kloss A og B. I tillegg virker vertikale krefter (som ikke er tegnet i figuren): Tyngdekrefter $m_{\rm A}$ og $m_{\rm B}$ på henholdsvis A og B, normalkraft $F_{\rm N,A}$ oppover fra underlaget på A, normalkraft $F_{\rm N,B}$ nedover på A fra kloss B og $F_{\rm N,B}$ oppover på B fra A. Aktuell horisontal bevegelse for de to klossene er motsatt rettet.

Klossene begynner å bevege seg akkurat idet trekkrafta F er lik sum av krefter i motsatt retning på A, som er friksjonskrefter og snorkraft. Tilsvarende for B. Friksjonskreftene er



$$\begin{aligned} F_{\rm f,A} &= \mu_{\rm s}F_{\rm N,A} = \mu_{\rm s}(m_{\rm A}+m_{\rm B})g \\ F_{\rm f,B} &= \mu_{\rm s}F_{\rm N,B} = \mu_{\rm s}m_{\rm B}g \end{aligned}$$

Grensen for bevegelse bestemmes altså ved Newton 1 på kloss A og på kloss B, som gir

$$\begin{aligned} F &= S + F_{\rm f,A} + F_{\rm f,B} \\ S &= F_{\rm f,B} \end{aligned}$$

Snordrag S fra andre likning innsatt i første gir

$$F = F_{\rm f,B} + F_{\rm f,A} + F_{\rm f,B} = F_{\rm f,A} + 2F_{\rm f,B}.$$

Friksjonskreftene innsatt gir

$$F = \mu_{\rm s}(m_{\rm A}+m_{\rm B})g + 2\mu_{\rm s}m_{\rm B}g = \mu_{\rm s}(m_{\rm A}+3m_{\rm B})g = 0,60\cdot(5,00\,\mathrm{kg}+3\cdot 3,00\,\mathrm{kg})\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} = 82,4\,\mathrm{N} = \underline{82\,\mathrm{N}}\,.$$

A.Mi. 31. juli 2014.