FY1001/TFY4145 Mekanisk Fysikk Eksamen August 2015

Løsningsforslag

OPPGAVE 1: Flervalgsoppgaver (Teller 45%, 18 stk som teller 2.5% hver)

1) Hva blir akselerasjonen (i absoluttverdi) til en kloss som glir *oppover* et friksjonsfritt skråplan med helningsvinkel 40°?

A) 1.8 m/s^2 B) 3.1 m/s^2 C) 6.3 m/s^2 D) 9.8 m/s^2

$a = F_{\|}/m = mg \sin 40^\circ/m = 6.3$ m/s^2. Riktig svar: C.

2) Hva blir akselerasjonen (i absoluttverdi) til en kloss som glir *oppover* et skråplan med helningsvinkel 20° når kinetisk friksjonskoeffisient mellom kloss og skråplan er 0.32?

A) 1.8 m/s^2 B) 3.1 m/s^2 C) 6.3 m/s^2 D) 9.8 m/s^2

$a = F_{\|}/m = (f + mg \sin 20^\circ)/m = (\mu_k N + mg \sin 20^\circ)/m = (\mu_k mg \cos 20^\circ + mg \sin 20^\circ)/m = 6.3$ m/s^2. Riktig svar: C.

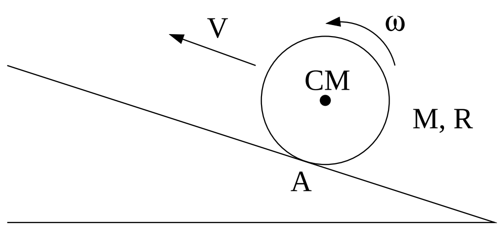
3) Ei kompakt kule med masse M og radius R ruller uten å gli (slure) nedover et skråplan med helningsvinkel 30°. Kula har treghetsmoment $I_0 = 2MR^2/5$ mhp en akse gjennom massesenteret. Hva er kulas hastighet når den har rullet 1 m nedover langs skråplanet og starthastigheten var null? (Tips: Energibevarelse.)

A) 0.45 m/s
B) 1.15 m/s
C) 1.95 m/s
D) 2.65 m/s

$K = Mv^2/2 + I_0\omega^2/2 = 7Mv^2/10$ siden $\omega = V/R$ (rullebetingelsen). Rulling en lengde x nedover når helningsvinkelen er 30 grader, gir et tap i potensiell energi $\Delta U = Mgx \sin 30^\circ = Mgx/2$. Energibevarelse, $K = \Delta U$, gir deretter $v = \sqrt{5gx/7}$ som med $x = 1$ m gir $v = 2.65$ m/s. Riktig svar: D.

4) Ei kompakt kule med masse $M = 1$ kg og radius $R = 0.1$ m slurer (roterer og glir; $\omega \neq V/R$) oppover et skråplan med helningsvinkel 20°. Kinetisk friksjonskoeffisient mellom kule og skråplan er 0.15. Hva er netto ytre dreiemoment på kula, med kulas massesenter (CM) som referansepunkt?

A) 0.14 Nm B) 0.75 Nm C) 1.31 Nm D) 1.92 Nm

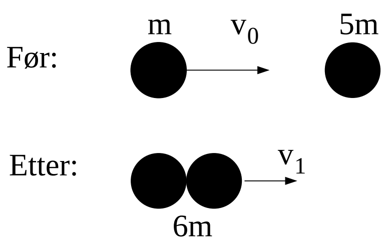


$\tau_{\text{CM}} = fR = \mu NR = \mu Mg\cos 20° \cdot R = 0.14$ Nm. Riktig svar: A.

5) For samme situasjon som i oppgave 4, hva er netto ytre dreiemoment på kula, med kontaktpunktet (A) som referansepunkt?

A) 0.07 Nm B) 0.34 Nm C) 0.61 Nm D) 0.88 Nm

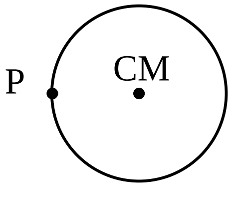
$\tau_{\text{A}} = Mg\sin 20° \cdot R = 0.34$ Nm. Riktig svar: B.



6) En masse m har hastighet v_0 ($v_0 \ll c$) og kolliderer fullstendig uelastisk med en annen masse $5m$ som ligger i ro. Etter kollisjonen henger de to massene sammen og har felles hastighet v_1. Hvor mye kinetisk energi gikk tapt i kollisjonen?

A) $3mv_0^2/8$ B) $mv_0^2/6$ C) $5mv_0^2/12$ D) $mv_0^2/12$

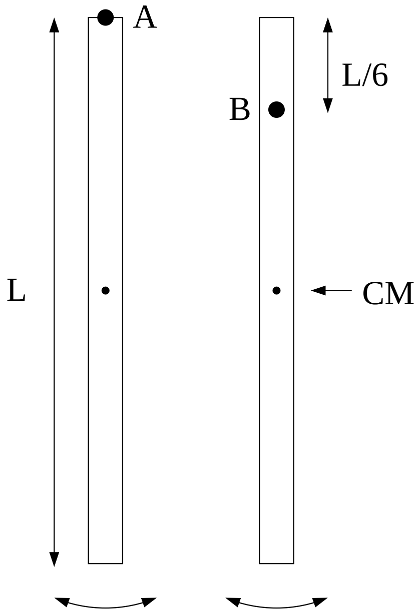
$p_1 = p_0 \Rightarrow 6mv_1 = mv_0 \Rightarrow v_1 = v_0/6 \Rightarrow K_1 = (1/2)\cdot 6m \cdot v_1^2 = mv_0^2/12 \Rightarrow |\Delta K| = mv_0^2/2 - mv_0^2/12 = 5mv_0^2/12$. Riktig svar: C.



7) Ei sirkulær skive med masse m og radius r har treghetsmoment $mr^2/2$ med hensyn på en akse gjennom skivas massesenter (CM). Hva er skivas treghetsmoment med hensyn på en akse gjennom et punkt (P) på skivas periferi? (Begge akser står normalt på skivas plan.)

A) mr^2 B) $3mr^2/2$ C) $2mr^2$ D) $5mr^2/2$

Steiners sats gir $I_P = I_0 + MR^2 = MR^2/2 + MR^2 = 3mr^2/2$. Riktig svar: B.



8) En tynn, jevntykk stav (fysisk pendel) har masse M, lengde L og treghetsmoment $I_0 = ML^2/12$ mhp en akse gjennom stavens massesenter (CM). Når staven svinger (friksjonsfritt) med små utsving fra likevekt om en akse helt øverst på staven (A), er perioden T_A. Dersom aksen parallellforskyves med $L/6$ i retning mot stavens massesenter (til posisjon B), er perioden T_B. Hva er forholdet T_B/T_A? (Oppgitt: $\omega_0 = \sqrt{Mgd/I}$)

A) $\sqrt{4/5}$ B) $\sqrt{5/6}$ C) $\sqrt{6/7}$ D) $\sqrt{7/8}$

$(T_B/T_A)^2 = I_B d_A / I_A d_B$. Vi har $d_A = L/2$, $d_B = L/3$. Steiners sats gir da: $I_A = ML^2/12 + M(L/2)^2 = ML^2/3$ og $I_B = ML^2/12 + M(L/3)^2 = 7ML^2/36$. Dermed: $(T_B/T_A)^2 = (7/36) \cdot (1/2)/((1/3) \cdot (1/3)) = (7/72)/(1/9) = 7/8$. Riktig svar: D.

9) Ei tynn stang lokalisert på x-aksen mellom $x = 0$ og $x = L$ har massetetthet (masse pr lengdeenhet) $\mu(x) = \mu_0\, x^2/L^2$. Her er μ_0 en konstant. Hvor er stavens massesenter x_{CM}? (Oppgitt: $dm = \mu\, dx$)

A) $x_{CM} = L/2$ B) $x_{CM} = 2L/3$ C) $x_{CM} = 3L/4$ D) $x_{CM} = 4L/5$

$$x_{CM} = \frac{\int_0^L x \cdot (\mu_0 x^2/L^2)dx}{\int_0^L (\mu_0 x^2/L^2)dx} = \frac{\int_0^L x^3 dx}{\int_0^L x^2 dx} = \frac{L^4/4}{L^3/3} = 3L/4.$$

Riktig svar: C.

10) To satellitter går i hver sin sirkulære bane rundt jorda, den ene i bane med fire ganger så stor radius som den andre. Hva er da forholdet mellom omløpstida (perioden) til de to satellittene?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16

$GmM/R^2 = mv^2/R = mR\omega^2 = 4\pi^2 mR/T^2$, dvs $T \sim R^{3/2}$, slik at periodeforholdet blir $4^{3/2} = 4\sqrt{4} = 8$. Riktig svar: C.

11) I jakten på formen på ei klessnor har du endt opp med å måtte løse ligningen $x = 5/4 - 2x/\sqrt{1+3x^2}$. Du satser på en enkel iterativ løsningsmetode, der en startverdi for x innsatt på høyre side av ligningen gir en oppdatert verdi av x, og dermed det iterative (repeterte) skjemaet

$$x_{i+1} = \frac{5}{4} - \frac{2x_i}{\sqrt{1+3x_i^2}}.$$

Med startverdien $x_1 = 1.0$, hva blir x_3?

A) $x_3 \simeq 0.53$ B) $x_3 \simeq 0.66$ C) $x_3 \simeq 0.79$ D) $x_3 \simeq 0.92$

$x_2 = 5/4 - 2/\sqrt{4} = 5/4 - 1 = 1/4$, $x_3 = 5/4 - 0.5/\sqrt{1 + 3/16} = 5/4 - 2/\sqrt{19} \simeq 0.79$. Riktig svar: C.

12) Den ene strengen på en oktobass skal stemmes slik at grunntonen har frekvens 16.35 Hz. Strengen er fastspent i begge ender, har lengde 215 cm, og masse pr lengdeenhet 69.0 g/m. Strammingen i strengen må da tilsvare en strekk-kraft

A) 68 N B) 168 N C) 268 N D) 341 N

Fra oppgave 18: $f_1 = \sqrt{S/\mu}/2L$, dvs $S = 4L^2 f_1^2 \mu = 4 \cdot 2.15^2 \cdot 16.35^2 \cdot 0.069 = 341$ N. Riktig svar: D.

13) En streng med masse pr lengdeenhet 69 g/m er skjøtt sammen med en streng med masse pr lengdeenhet 5 g/m. En harmonisk transversal bølge kommer inn mot skjøten. Hvor stor andel av bølgens energi blir reflektert i skjøten?

A) 77% B) 55% C) 33% D) 11%

$R = (\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1})^2/(\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1})^2 = (\sqrt{69} - \sqrt{5})^2/(\sqrt{69} + \sqrt{5})^2 = 0.33 = 33\%$. Riktig svar: C.

14) En kuleformet lydkilde sender ut lyd slik at lydtrykksnivået er 50 dB i avstand 50 m fra sentrum av lydkilden. I hvilken avstand fra lydkildens sentrum er lydtrykksnivået da 80 dB?

A) 1.6 m B) 5.0 m C) 8.0 m D) 31 m

$I(r) \sim 1/r^2$ for kuleformet kilde. Dermed: $50/10 = \log(I(50)/I_0)$, $80/10 = \log(I(r)/I_0)$, dvs $5 = \log I(50) - \log I_0$, $8 = \log I(r) - \log I_0$, dvs $3 = \log(I(r)/I(50)) = \log(50^2/r^2)$, dvs $r^2 = 50^2/10^3 \text{ m}^2 = 2.5 \text{ m}^2$, dvs $r \simeq 1.6$ m. Riktig svar: A.

15) To små kuleformede lydkilder sender ut harmoniske lydbølger med samme frekvens og i fase. I en posisjon 10.0 m fra den ene og 13.4 m fra den andre lydkilden er lydintensiteten praktisk talt lik null. Hva kan du da si om den utsendte lydens frekvens? Lydens hastighet er 340 m/s.

A) Frekvensen er nøyaktig 50 Hz. B) Frekvensen er minst 50 Hz.
C) Frekvensen er maksimalt 50 Hz. D) Intet kan sies om frekvensen.

For destruktiv interferens må vi ha en veilengdeforskjell gitt ved $\Delta r = (n+1/2)\lambda$, som betyr at bølgelengden ikke kan være mer enn $2\Delta r$ (som inntreffer hvis $n = 0$). Med andre ord, frekvensen kan ikke være mindre enn $v/2\Delta r = 340/6.8$ Hz $= 50$ Hz. Riktig svar: B.

16) Et jordskjelv på havbunnen skaper en forstyrrelse (bølgepakke) på havoverflaten med bølgelengder omkring 25 km. Vanndybden er $D = 0.5$ km. Omtrent hvor lang tid bruker bølgepakken på å vandre 800 km? Oppgitt: $\omega(k) = \sqrt{gk \tanh(kD)}$, $\tanh x \simeq x$ når $x \ll 1$, $\tanh x \simeq 1$ når $x \gg 1$.

A) 0.7 timer B) 3.2 timer C) 8.9 timer D) 15 timer

Her er $kD = 2\pi D/\lambda = 2\pi \cdot 0.5/25 \simeq 0.13 \ll 1$, slik at $\omega^2 \simeq gk \cdot kD = gDk^2$, dvs $\omega \simeq \sqrt{gD}k$. Gruppehastighet og fasehastighet er nå like store, og $v_g = \sqrt{gD} = 70$ m/s. Da tar det ca 3.2 timer å tilbakelegge 800 km. Riktig svar: B.

17) Et stort cruiseskip seiler forbi 1 km fra land og lager en bølgepakke med bølgelengder omkring 20 m. Bølgene har retning rett mot land. Dybden er overalt mer enn 100 m. Omtrent hvor lang tid går det fra bølgepakken skapes til den slår mot land?

A) 6 minutt B) 12 minutter C) 18 minutter D) 24 minutter

Her er $kD = 2\pi D/\lambda > 2\pi \cdot 100/20 \simeq 31 \gg 1$, slik at $\omega^2 \simeq gk \cdot 1$, dvs $\omega \simeq \sqrt{gk}$. Da blir gruppehastigheten $v_g = d\omega/dk = (1/2)\sqrt{g/k} = \sqrt{g/4k} = \sqrt{g\lambda/8\pi} \simeq 2.79$ m/s. Da tar det ca 358 sekunder å tilbakelegge 1 km, dvs ca 6 minutter. Riktig svar: A.

18) Frekvensen til grunntonen på en streng som er fastspent i begge ender, er

$$f = \frac{\sqrt{S/\mu}}{2L}.$$

Du anslår relative usikkerheter som følger: $\Delta S/S = 0.02$, $\Delta\mu/\mu = 0.002$ og $\Delta L/L = 0.001$. Hva blir da relativ usikkerhet i frekvensen, $\Delta f/f$?

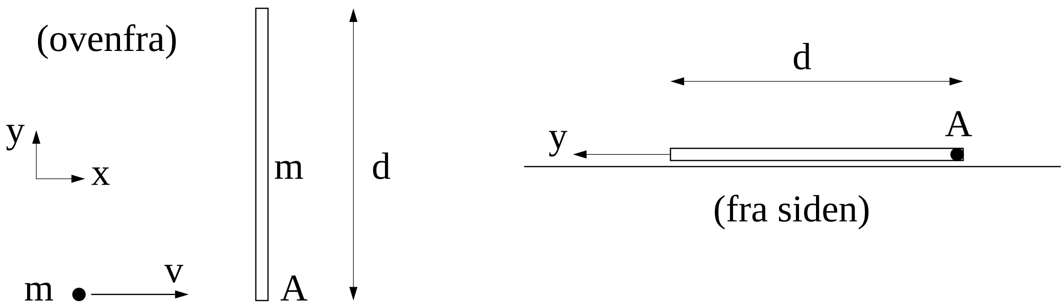
A) 7% B) 5% C) 3% D) 1%

Her ser vi at relativ usikkerhet i S dominerer, slik at vi har $\Delta f/f \simeq \Delta S/2S = 0.01$, dvs 1%. Riktig svar: D.

Fasit for Oppgave 1

Deloppgave	A	B	C	D
1	☐	☐	x	☐
2	☐	☐	x	☐
3	☐	☐	☐	x
4	x	☐	☐	☐
5	☐	x	☐	☐
6	☐	☐	x	☐
7	☐	x	☐	☐
8	☐	☐	☐	x
9	☐	☐	x	☐
10	☐	☐	x	☐
11	☐	☐	x	☐
12	☐	☐	☐	x
13	☐	☐	x	☐
14	x	☐	☐	☐
15	☐	x	☐	☐
16	☐	x	☐	☐
17	x	☐	☐	☐
18	☐	☐	☐	x

OPPGAVE 2: Uelastisk kollisjon mellom stav og prosjektil (Teller 30%)



En stav med lengde d og masse m ligger i ro på et horisontalt friksjonsfritt underlag, for eksempel ei glatt bordplate. Et prosjektil (som kan betraktes som en punktmasse) har samme masse m som staven, hastighet $\boldsymbol{v} = v\,\hat{x}$, og kolliderer fullstendig uelastisk med staven helt ute ved stavens ene ende (A). Etter kollisjonen (som har neglisjerbar varighet) beveger stav og prosjektil ("systemet") seg som ett legeme.

a) Hva er hastigheten til systemets massesenter før sammenstøtet?
$\boldsymbol{v}_{\rm CM} = (v/2)\hat{x}$

b) Beskriv kvalitativt systemets bevegelse etter sammenstøtet.
Translasjon av CM med hastigheten regnet ut i forrige punkt, kombinert med rotasjon omkring CM.

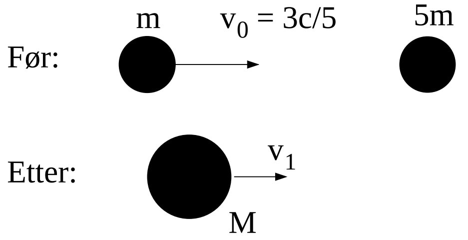
c) Forklar hvorfor systemets impuls og dreieimpuls er bevart i kollisjonen.
Både ytre nettokraft og ytre netto dreiemoment er lik null, og da er hhv impuls og dreieimpuls bevarte størrelser.

d) Hva er systemets impuls $\boldsymbol{p}$?
$\boldsymbol{p} = mv\hat{x}$

e) Hva er systemets dreieimpuls $\boldsymbol{L}_{\rm CM}$ om sitt massesenter CM?
$\boldsymbol{L}_{\rm CM} = (d/4)(-\hat{y} \times mv\hat{x} = (mvd/4)\hat{z}$

f) Finn et uttrykk for $\Delta K = K_i - K_f$, dvs tapt kinetisk energi i sammenstøtet. Her er altså K_i og K_f systemets kinetiske energi hhv før og etter sammenstøtet.
$K_i = mv^2/2$. $K_f = (1/2)(m+m)v/2)^2 + (1/2)I\omega^2$. Treghetsmoment I mhp akse gjennom CM: $I = m(d/4)^2 + md^2/12 + m(d/4)^2 = 5md^2/24$. Vinkelhastighet for rotasjonen omkring CM: $\omega = L/I = (mvd/4)/(5md^2/24) = 6v/5d$. Dermed er $K_f = mv^2/4 + 3mv^2/20 = 2mv^2/5$ slik at $\Delta K = K_i - K_f = mv^2/10$, dvs 20% av opprinnelig kinetisk energi K_i.

OPPGAVE 3: Uelastisk relativistisk kollisjon (Teller 15%)



En partikkel med masse m har hastighet $v_0 = 3c/5$ og kolliderer fullstendig uelastisk med en partikkel med masse $5m$ som ligger i ro. (c er lyshastigheten) Etter kollisjonen består systemet av kun en partikkel med masse M og hastighet v_1.

- Systemets totale relativistiske impuls kan skrives på formen $p = a\,mc$. Hva er a?
- Systemets totale relativistiske energi kan skrives på formen $E = b\,mc^2$. Hva er b?

Vi har $p = \gamma_0 m v_0$, og med $v_0 = 3c/5$ er $\gamma_0 = (1 - 9/25)^{-1/2} = 5/4$, slik at $p = (5/4)m \cdot 3c/5 = (3/4)mc$. Dvs, $a = 3/4$.

For partikkelen med hastighet $3c/5$ er energien $\gamma_0 mc^2 = (5/4)mc^2$, og for partikkelen som ligger i ro er energien $5mc^2$. I alt $E = (25/4)mc^2$. Dvs, $b = 25/4$.

Både a og b er dimensjonsløse tall. Dersom du ikke har fastlagt tallverdier for a og b, kan du rett og slett operere med a og b i fortsettelsen, etter behov.

Bruk prinsippene om bevaring av p og E til å bestemme følgende størrelser i slutt-tilstanden (dvs etter kollisjonen):

- Forholdet v_1/c.
- Forholdet M/m.
- Forholdet K/mc^2. Her er K kinetisk energi etter kollisjonen.

Etter kollisjonen er impulsen $\gamma_1 M v_1$, med $\gamma_1 = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2}$. Energien etter kollisjonen er $\gamma_1 Mc^2$. Med andre ord, $\gamma_1 M v_1 = 3mc/4$ og $\gamma_1 Mc^2 = 25mc^2/4$. Når vi dividerer disse to ligningene med hverandre, forkortes $\gamma_1 M$ bort, og vi står igjen med $v_1/c^2 = 3/25c$, dvs $v_1 = 3c/25$. Dermed er $\gamma_1 = (1 - 9/625)^{-1/2} = 25/\sqrt{616}$, slik at massen i slutt-tilstanden blir $M = 25m/4\gamma_1 = \sqrt{616}m/4$. Og til slutt, kinetisk energi i slutt-tilstanden: $K = (\gamma_1 - 1)Mc^2 = (25/\sqrt{616} - 1) \cdot \sqrt{616}mc^2/4$.
Oppsummert:

- $v_1/c = 3/25 = 0.09$
- $M/m = \sqrt{616}/4 = 6.20$
- $K/mc^2 = (25/\sqrt{616} - 1) \cdot \sqrt{616}/4 = 0.045$

Med andre ord, den uelastiske kollisjonen har resultert i økt masse (fra $6m$ til $6.20m$) og redusert kinetisk energi (fra $mc^2/4$ til $0.045mc^2$).