FY1001/TFY4145 Mekanisk Fysikk Eksamen 18. desember 2015

Løsningsforslag

---

1) Her har vi bevegelse med konstant akselerasjon: $h = at^2/2$, med $h = 14$ m og $a = g$. Dermed: $t = \sqrt{2h/a} = \sqrt{2 \cdot 14/9.81}$ s $= 1.7$ s.
C

---

2) Kula har en sentripetalakselerasjon $a = v^2/r = (2\pi r/T)^2/r = 4\pi^2 r/T^2 = 4\pi^2 \cdot 0.900/0.500^2 = 142$ m/s^2.
C

---

3) Maksimalt snordrag S er lik maksimal statisk friksjonskraft $\mu_s N = \mu_s mg$:
$S = 0.25 \cdot 0.25 \cdot 9.81$ N $= 0.61$ N.
A

---

4) Terminalhastighet v bestemt av Newtons 1. lov, $bv = mg$, dvs $v = mg/b = 0.0027 \cdot 9.81/0.0030$ m/s $=$ 8.8 m/s.
E

---

5) Tyngdens komponent langs skråplanet, $mg \sin\beta$, lik maksimal statisk friksjonskraft, $f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\beta$ gir $\sin\beta = \mu_s \cos\beta$, dvs $\tan\beta = \mu_s$, dvs $\beta = \arctan 0.25 = 14°$.
B

---

6) Tyngdens komponent langs skråplanet, $mg \sin\beta$, lik kinetisk friksjonskraft, $f = \mu_k N = \mu_k mg\cos\beta$ gir $\sin\beta = \mu_k \cos\beta$, dvs $\mu_k = \tan 12° = 0.21$.
E

---

7) Klossen har mistet potensiell energi $\Delta U = mg\Delta h = mgR(1 - \cos 30°)$, som tilsvarer oppnådd kinetisk energi $K = mv^2/2$. Dermed er $v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 8.0 \cdot (1 - \sqrt{3}/2)} = 4.6$ m/s.
A

---

8) Newtons 2. lov: $F = \Delta p/\Delta t = 2mv/\Delta t = 2 \cdot 0.0027 \cdot 8.0/0.0020$ N $= 22$ N.
C

---

9) $K = I_0\omega^2/2 = (MR^2/2)\omega^2/2 = (300 \cdot 1.50^2/2) \cdot 30.0^2/2 = 151875$ J $\simeq 152$ kJ.
D

---

10) Med Steiners sats: $I = I_0 + Md^2 = MR^2/2 + MR^2 = 3MR^2/2 = 3 \cdot 300 \cdot 1.50^2/2 = 1.01 \cdot 10^3$ kg m^2.
D

---

11) $L = L_b + L_s = MRV + 2MRV/5 = 7MRV/5 = 7 \cdot 20 \cdot 0.10 \cdot 2.0/5 = 5.6$ kg m^2/s.
D

---

12) To oksygenatomer, hver med masse $16u$, ligger i avstand $d \cos 30^\circ$ fra aksen, med $u = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg og $d = 142$ pm $= 1.42 \cdot 10^{-10}$ m. Dermed: $I = 2 \cdot 16 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \cdot (1.42 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{3}/2)^2 = 8.0 \cdot 10^{-46}$.
A

---

13) Den kinetiske friksjonskraften $f = \mu_k N = \mu_k Mg$ er konstant så lenge skiva slurer mot underlaget, og med retning mot høyre. Så fort skiva begynner å rulle rent uten å slure, vil friksjonskraften bli borte, og skiva ruller med konstant hastighet og konstant vinkelhastighet.
C

---

14) Newtons 2. lov for rotasjon, $\tau = I_0 d\omega/dt$, med $\tau = -fR = -\mu_k MgR$, gir her $-\mu_k MgR = (MR^2/2)d\omega/dt$, som med $\omega(0) = \omega_0$ gir $\omega(t) = \omega_0 - 2\mu_k gt/R$. Newtons 2. lov (dvs for translasjonsbevegelsen), $F = MdV/dt$, med $F = f = \mu_k Mg$ og $V(0) = 0$, gir $V(t) = \mu_k gt$. Ren rulling ved tidspunktet t_r bestemt av at $\omega(t_r)R = V(t_r)$, dvs $\omega_0 R - 2\mu_k g t_r = \mu_k g t_r$, dvs $t_r = \omega_0 R / 3\mu_k g$.
B

---

15) Med $\mu_k = 1/\sqrt{3}$ og helningsvinkel 30° er friksjonskraften, med retning oppover skråplanet, lik $f = \mu_k N = \mu_k Mg \cos 30^\circ = Mg/2$. Tyngdens komponent langs skråplanet, med retning nedover, er $Mg \sin 30^\circ = Mg/2$. Med andre ord, netto kraft på skiva langs skråplanet er lik null, så lenge skiva slurer, dvs så lenge den roterer med klokka. Med null starthastighet forblir $V = 0$ inntil skiva slutter å rotere. Deretter vil den rulle uten å slure nedover skråplanet, med konstant akselerasjon.
A

---

16) All kinetisk rotasjonsenergi $K = I_0\omega_0^2/2 = MR^2\omega_0^2/4$ tapes i form av friksjonsarbeid, siden skiva helt slutter å rotere. Deretter ruller den nedover uten å slure, dvs uten å miste ytterligere mekanisk energi.
B

---

17) Må bestemme t_r slik at rullebetingelsen er oppfylt, dvs $\omega(t_r)R = V(t_r)$.
N2: $F = MV_0/T$, dvs $V_0 = FT/M$.
N2 rotasjon: $FR = I_0\omega_0/T = 2MR^2\omega_0/5T$, dvs $\omega_0 = 5FT/2MR$.
Vi ser at $V_0 < \omega_0 R$, slik at kula slurer med "toppspinn", og den kinetiske friksjonskraften $f = \mu_k N = \mu_k Mg$ virker mot høyre. Effekten blir en reduksjon i ω og en økning i V.
N2: $f = M\,dV/dt$, dvs $V(t) = V_0 + \mu_k Mgt/M = V_0 + \mu_k gt$.
N2 rotasjon: $-fR = I_0\,d\omega/dt$, dvs $\omega(t) = \omega_0 - 5\mu_k gt/2R$.
Rullebetingelsen gir nå:

$$
\begin{aligned}
\omega_0 R - 5\mu_k g t_r/2 &= V_0 + \mu_k g t_r \\
7\mu_k g t_r/2 = \omega_0 R - V_0 &= 5FT/2M - FT/M = 3FT/2M \\
t_r &= 3FT/7\mu_k Mg
\end{aligned}
$$

D

---

18) N2 for de to loddene samlet: $(m + M)a = mg - \mu_k Mg$, dvs

$$
a = g \cdot \frac{m - \mu_k M}{m + M} = g \cdot \frac{0.200 - 0.030}{0.500} = 3.34\,\mathrm{m/s^2}.
$$

B

---

19) Newtons 2. lov for loddet (masse m, snordrag S): $ma = mg - S$. Newtons 2. lov for rotasjon for skiva: $\tau = I_0\alpha = I_0 a/R$, med $\tau = SR$ og $I_0 = MR^2/2$, samt rullebetingelsen $\alpha = a/R$. Dette resulterer i $Ma/2 = S$. Addisjon av de to ligningene gir $(m + M/2)a = mg$, dvs $a = mg/(m + M/2) = g/(1 + M/2m)$, som med $2m = 50$ g og $M = 1000$ g blir $a = g/21 = 0.47$ m/s^2.
B

---

20) Vi har $v = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{SL/M}$ og $\lambda = L$, slik at $f = v/\lambda = \sqrt{S/ML}$. Det betyr at $\log f = 0.5 \log S - 0.5 \log M - 0.5 \log L$, slik at plotting av $\log f$ vs $\log S$ skal gi en rett linje med stigningstall 0.5.
B

---

21) Og plotting av $\log f$ vs $\log M$ skal da gi en rett linje med stigningstall -0.5.
D

---

22) Fysisk pendel: $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/Mgd} = 2\pi\sqrt{(I_0 + Md^2)/Mgd}$. Løsning mhp I_0 gir

$$I_0 = Md^2 \left(\frac{gT^2}{4\pi^2 d} - 1 \right),$$

som med innsetting av oppgitte tallverdier $T = 1.61$ s, $M = 2.65$ kg og $d = 0.56$ m gir $I_0 = 125$ g m^2.
A

---

23) Kulas bevegelse er praktisk talt en lineær harmonisk oscillator med utsving $x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$, med vinkelfrekvens (matematisk pendel) $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Kulas baneakselerasjon er dermed $a_\parallel(t) = -\omega_0^2 x_0 \cos\omega_0 t$, med maksimalverdi $\omega_0^2 x_0 = gx_0/L = 9.81 \cdot 1.0/25 = 0.39$ m/s^2 = 39 cm/s^2. (Kula har også en sentripetalakselerasjon $a_\perp(t) = v(t)^2/L$, som er maksimal når v er maksimal, dvs når kula passerer likevektsposisjonen $x = 0$, men dennes maksimalverdi er ikke større enn $(\omega_0 x_0)^2/L = gx_0^2/L^2$, dvs en faktor x_0/L mindre enn den maksimale baneakselerasjonen.)
D

---

24) $Q = f_0/\Delta f = \omega_0/\Delta\omega = \sqrt{g/L}/2\gamma = \sqrt{g/L}/(b/M) = \sqrt{9.81/25}/(0.009/40) = 2784 \simeq 2.8 \cdot 10^3$.
D

---

25) Lydhastigheten i luft er proporsjonal med kvadratroten av absolutt temperatur T, målt i K (kelvin). Vi har $T = 268$ K og $T = 278$ K ved hhv 5 kuldegrader og 5 varmegrader, slik at $v(278) = v(268)\sqrt{278/268} = v(268) \cdot 1.018 \simeq v(268) \cdot 1.02$, dvs en økning på ca 2%.
B

---

26) Intensitet i avstand 4.0 m: $I = P/A = P/4\pi R^2 = 20/4\pi{\cdot}16 = 0.10$ W/m^2. Dermed: $\beta = 10 \log(0.10/10^{-12}) = 10 \log 10^{11} = 110$ dB.
E

---

27) Grunntonen: $\lambda = 2L = 0.86$ m. Vi har videre $\lambda = v/f$ og $v = \sqrt{S/\mu}$. Dermed er $S = \mu(\lambda f)^2 = 0.0015 \cdot (0.86 \cdot 440)^2 = 215$ N.
C

---

28) Grunntonen i et rør som er åpent i begge ender: $\lambda = 2L$. Dermed: $L = \lambda/2 = v/2f = 340/2 \cdot 65.4 = 170/65.4 = 2.60$ m $= 260$ cm.
D

---

29) $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 2\pi/\sqrt{6.25 + 6.25 + 2.25} = 2\pi/\sqrt{14.75} = 1.636$ m, som gir $f = v/\lambda = 340/1.636 = 208$ Hz.
D

---

30) Bølgetallsvektorens komponent i xy-planet har lengde $k_{xy} = \sqrt{6.25 + 6.25} = \sqrt{12.5}$ m^{-1} og $k_z = 1.50$ m^{-1}. Dermed: $\alpha = \arctan(k_{xy}/k_z) = \arctan(\sqrt{12.5}/1.5) = 67^\circ$.
E

---

31) Total energi i bølgepulsen er

$$E = \int dE = \int_{-\pi a/2}^{\pi a/2} \varepsilon(x) dx = \frac{Sy_0^2}{a^2} \int_{-\pi a/2}^{\pi a/2} \sin^2(x/a)\, dx.$$

Vi substituerer $z = x/a$. Da er $dx = a\, dz$, og

$$E = \frac{Sy_0^2}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 z\, dz.$$

Integralet er lik $\pi/2$, som en for eksempel innser ved å tegne opp $\sin^2 z$. Alternativt kan den oppgitte identiteten i formelvedlegget settes inn. Innsetting av tallverdier gir $E = 0.012$ J $= 12$ mJ.
Den kjappe løsningen: E må være proporsjonal med S og y_0^2, basert på uttrykket for $\varepsilon(x)$. Av dimensjonsmessige grunner må da E også være proporsjonal med $1/a$. Den manglende tallfaktoren må være av størrelsesorden 1, slik at $E \simeq Sy_0^2/a = 125 \cdot 0.003^2/0.15 = 0.0075$ J $= 8$ mJ. Bare alternativ C er noenlunde i nærheten av dette.
C

---

32) Lyden går fram og tilbake mellom flaggermusen og myggen i løpet av 0.015 s, med hastighet 340 m/s. Da er avstanden $x = vt/2 = 340 \cdot 0.015/2 = 2.55$ m $= 255$ cm.
A

---

33) Myggen hører – og returnerer – frekvensen

$$f_M = \frac{v - v_M}{v - v_F}\, f,$$

med $v = 340$ m/s og positive v_M og v_F i lydens retning. Flaggermusen hører dermed et ekko med frekvensen

$$f_F = \frac{v + v_F}{v + v_M}\, f_M = \frac{(v + v_F)(v - v_M)}{(v + v_M)(v - v_F)}\, f.$$

Innsetting av tallverdier ($f = 33$, $f_F = 35$ og $v_F = 8$) og løsning mhp myggens hastighet gir $v_M = -2.0$ m/s, dvs hastighet 2.0 m/s mot flaggermusen.
D

---

34) Dersom mikrofonen flyttes en halv bølgelengde den ene eller den andre veien, blir endringen i veilengdeforskjell mellom de to lydbølgene en hel bølgelengde, dvs konstruktiv interferens igjen dersom vi hadde det i utgangspunktet. Forflytning en kvart bølgelengde gir en endring i veilengdeforskjell på en halv bølgelengde, dvs destruktiv interferens igjen, dersom det var det vi hadde i utgangspunktet. Her er bølgelengden $\lambda = v/f = 340/3400 = 0.10$ m = 10 cm.
E

---

35) Vi er på dypt vann. Da er $\tanh(kD) \simeq 1$, og $\omega(k) \simeq \sqrt{gk}$. Bølgepakkens gruppehastighet er

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{g/4k} = \sqrt{g\lambda/8\pi} = 2.5\,\mathrm{m/s}.$$

E

---

36) Keplers 3. lov gir for Neptuns midlere avstand a_N til Sola:

$$a_N = 150\,\mathrm{Gm} \cdot (165/1)^{2/3} \simeq 4500\,\mathrm{Gm}.$$

D

---

37) Tyngdens akselerasjon er proporsjonal med planetens masse og omvendt proporsjonal med kvadratet av planetens radius, dvs omvendt proporsjonal med volumet opphøyd i 2/3. Dermed er tyngdens akselerasjon på Neptuns overflate

$$g_{\mathrm{Neptun}} = g \cdot 17.147/57.74^{2/3} = 1.15\,g.$$

B

---

38) Siden $g(r) \sim 1/r^2$ og vi skal finne høyden h som gir $g(R+h) = g(R)/3$, blir ligningen $1/(R+h)^2 = 1/3R^2$, dvs $R + h = \sqrt{3}R$, dvs $h = \sqrt{3}R - R = 0.732 \cdot 6370 = 4663$ km.
D

---

39) Tyngdekraften på satellitten skal gi en sentripetalakselerasjon som gir omløpstid på ett neptundøgn, dvs $T = 16.11$ h = 57996 s. Dvs: $mv^2/r = mMG/r^2$ med $v = 2\pi r/T$. Løses mhp r, som gir

$$r = (MGT^2/4\pi^2)^{1/3} = 83379\,\mathrm{km}.$$

Vi trekker fra Neptuns ekvatorialradius 24764 km og finner høyden 58615 km, dvs ca 59 Mm.
C

---

40) Ingen grunn til å tvile her: Lysets hastighet er c i ethvert inertialsystem.
C

---

41) Pga tidsdilatasjon: $t = \gamma\bar{t}$. Her er tiden målt av konduktøren på toget $\bar{t} = h/c = 3.00/3 \cdot 10^8 = 10^{-8}\,\mathrm{s} = 10$ ns. Lorentzfaktoren er $\gamma = 1/\sqrt{1 - 1/9} = 3/\sqrt{8}$. Dermed tar det 10.6 ns på din klokke for lyssignalet å gå fra lyskilden i taket til detektoren på gulvet.
B

---

42) $K = (\gamma - 1) m_e c^2 = 15 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 2.4 \cdot 10^{-12}$ J, slik at $\gamma = 1 + 2.4 \cdot 10^{-12} / 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 30.27$. Da kan vi finne elektronenes hastighet: $1 - v^2/c^2 = 1/\gamma^2 = 1.09 \cdot 10^{-3}$, slik at $v = c\sqrt{1 - 1.09 \cdot 10^{-3}} = 0.9995\, c$.
C

---

43) Årlig globalt energiforbruk i 2012 i SI-enhet: $1.6 \cdot 10^{17}\,\mathrm{J/s} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 5.76 \cdot 10^{20}$ J. Divisjon med c^2 gir den etterspurte massereduksjonen, ca 6.4 tonn.
A

---

44) $\lambda = hc/E = 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 66.0 \cdot 10^6 \cdot 1.60 \cdot 10^{19} = 1.88 \cdot 10^{-14}$ m.
C

---

45) Systemets totale energi er 1192.5 MeV, Σ^0–partikkelens hvileenergi. Fra dette må vi subtrahere Λ–partikkelens hvileenergi 1115.6 MeV og fotonets energi 66.0 MeV, i alt 1181.6 MeV, for å finne Λ–partikkelens kinetiske energi $K = 10.9$ MeV. Da har vi at (med energier hele tiden i enheten MeV) $10.9 = 1115.6 \cdot (\gamma - 1)$, slik at $\gamma = 1 + 10.9/1115.6 = 1.00977$. Dette gir en hastighet $v = c\sqrt{1 - 1/\gamma^2} \simeq 0.14\, c$.
B
