FY1001/TFY4145 Mekanisk Fysikk Eksamen 9. august 2016

Løsningsforslag

---

1) Her har vi bevegelse med konstant akselerasjon: $v = at = 9.81 \cdot 0.5$ m/s $= 4.9$ m/s. (Kula er fortsatt i fritt fall, siden $h = at^2/2 = 9.81 \cdot 0.5^2/2 = 1.23$ m, som er mindre enn starthøyden 2.0 m.)
E

---

2) Kula har sentripetalakselerasjon $a = v^2/r = (2\pi r/T)^2/r = 2\pi \cdot (2\pi r/T)^2/(2\pi r) = 2\pi \cdot 1.50/0.150^2$ m/s^2 $= 419$ m/s^2.
E

---

3) Kinetisk friksjonskraft er $\mu_k N = \mu_k mg$. N2 gir da at $F_{\text{tot}} = S - \mu_k mg = ma$, dvs $S = m(a + \mu_k g) = 2.25 \cdot (0.15 + 0.20 \cdot 9.81) = 4.8$ N.
B

---

4) Terminalhastighet v er bestemt av N1, $bv^2 = mg$, dvs $v = \sqrt{mg/b} = \sqrt{0.0027 \cdot 9.81/0.0011}$ m/s $= 4.9$ m/s.
B

---

5) Tyngdens komponent langs skråplanet, $mg \sin\beta$, lik maksimal statisk friksjonskraft, $f_{\text{max}} = \mu_s N = \mu_s mg \cos\beta$ gir $\sin\beta = \mu_s \cos\beta$, dvs $\tan\beta = \mu_s$, dvs $\beta = \arctan 0.35 = 19°$.
A

---

6) Tyngdens komponent langs skråplanet, $mg \sin\beta$, lik kinetisk friksjonskraft, $f = \mu_k N = \mu_k mg \cos\beta$ gir $\sin\beta = \mu_k \cos\beta$, dvs $\mu_k = \tan\beta$, dvs $\beta = \arctan 0.20 = 11°$.
C

---

7) Klossen har mistet potensiell energi $\Delta U = mg\Delta h = mgR(1 - \cos\beta)$, som tilsvarer oppnådd kinetisk energi $K = mv^2/2$. Dermed er $v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2gR(1 - \cos\beta)}$.
C

---

8) Newtons 2. lov: $F = \Delta p/\Delta t = 2mv/\Delta t = 2 \cdot 0.046 \cdot 30/0.0010$ N $= 2.8$ kN.
B

---

9) $K = MV^2/2 + I_0\omega^2/2 = MV^2/2 + (2MR^2/5)(V/R)^2/2 = 7MV^2/10 = 0.7 \cdot 10 \cdot 3.0^2 = 63$ J .
A

---

10) Med Steiners sats: $I = I_0 + Md^2 = MR^2/2 + MR^2 = 3MR^2/2 = 3 \cdot 17 \cdot 0.37^2/2 = 3.5$ kg m^2.
E

---

11) $L = L_b + L_s = MRV + 2MRV/5 = 7MRV/5 = 7 \cdot 10 \cdot 0.11 \cdot 3.0/5 = 4.6$ kg m^2/s.
C

---

12) De tre oksygenatomene, hver med masse $16u$, ligger alle i avstand 1.42 Å fra aksen. Dermed: $I_0 = 3 \cdot 16 \cdot 1.42^2 \simeq 97$ u Å^2.
D

---

13) Den kinetiske friksjonskraften $f = \mu_k N = \mu_k Mg$ er konstant så lenge skiva slurer mot underlaget, og med retning mot høyre. Så fort skiva begynner å rulle rent uten å slure, vil friksjonskraften bli borte, og skiva ruller med konstant hastighet og konstant vinkelhastighet.
C

---

14) Newtons 2. lov for rotasjon, $\tau = I_0 d\omega/dt$, med $\tau = -fR = -\mu_k MgR$, gir her $-\mu_k MgR = (MR^2)d\omega/dt$, som med $\omega(0) = \omega_0$ gir $\omega(t) = \omega_0 - \mu_k gt/R$. Newtons 2. lov (dvs for translasjonsbevegelsen), $F = MdV/dt$, med $F = f = \mu_k Mg$ og $V(0) = 0$, gir $V(t) = \mu_k gt$. Ren rulling ved tidspunktet t_r bestemt av at $\omega(t_r)R = V(t_r)$, dvs $\omega_0 R - \mu_k g t_r = \mu_k g t_r$, dvs $t_r = \omega_0 R/2\mu_k g$.
C

---

15) Så lenge ringen slurer virker den kinetiske friksjonskraften nedover, dvs i samme retning som tyngdens komponent langs skråplanet. Når ringen ruller rent, virker den statiske friksjonskraften oppover, dvs i motsatt retning av tyngdens komponent langs skråplanet. Dermed størst, og konstant, totalkraft nedover innledningsvis, og en mindre, men fortsatt konstant, totalkraft nedover etter at ren rulling er oppnådd.
B

---

16) N2 gir $a = F/M = g(\sin\beta + \mu_k \cos\beta)$, som med $\beta = 30°$ og $\mu_k = 0.30$ betyr at $a = 7.5$ m/s^2.
D

---

17) Systemets totale impuls er bevart. Felles slutthastighet blir dermed $(MV/3)/(4M/3) = V/4$.
D

---

18) N2 for de to loddene samlet: $(m + M)a = mg$, dvs $a = mg/(m + M) = 0.200 \cdot 9.81/0.500 = 3.92$ m/s^2.
A

---

19) Newtons 2. lov for loddet (masse m, snordrag S): $ma = mg - S$. Newtons 2. lov for rotasjon for skiva: $\tau = I_0\alpha = I_0 a/R$, med $\tau = SR$ og $I_0 = MR^2/2$, samt rullebetingelsen $\alpha = a/R$. Dette resulterer i $Ma/2 = S$. Addisjon av de to ligningene gir $(m + M/2)a = mg$, dvs $a = mg/(m + M/2) = g/(1 + M/2m)$, som med $2m = 150$ g og $M = 750$ g blir $a = g/6 = 1.64$ m/s^2.
C

---

20) Vi har $v = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{SL/M}$ og $\lambda = L$, slik at $f = v/\lambda = \sqrt{S/ML}$. Det betyr at $\log f = 0.5 \log S - 0.5 \log M - 0.5 \log L$, slik at plotting av $\log f$ vs $\log M$ skal gi en rett linje med stigningstall -0.5.
D

---

21) Og plotting av $\log f$ vs $\log S$ skal da gi en rett linje med stigningstall 0.5.
B

---

22) Dette er en fysisk pendel: $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/Mgd} = 2\pi\sqrt{(I_0 + Md^2)/Mgd}$. Her har vi brukt Steiners sats. Løsning mhp I_0 gir

$$I_0 = Md^2\left(\frac{gT^2}{4\pi^2 d} - 1\right),$$

som med innsetting av oppgitte tallverdier $T = 2.15$ s, $M = 5.9$ kg og $d = 0.70$ m gir $I_0 = 1.25$ kg m^2.
E

---

23) Kulas bevegelse er praktisk talt en lineær harmonisk oscillator med utsving $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$, med vinkelfrekvens (matematisk pendel) $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Kulas banefart er dermed $v(t) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$, med maksimalverdi $\omega_0 x_0 = \sqrt{g/L} x_0 = \sqrt{9.81/25} \cdot 1.0 = 0.63$ m/s.
B

---

24) $\sin \theta_0 = 1/25$, som gir maksimal vinkel $\theta_0 = 2.3°$.
B

---

25) Lydhastigheten i luft er proporsjonal med kvadratroten av absolutt temperatur T, målt i K (kelvin). Vi har $T = 288$ K og $T = 283$ K ved hhv 15 og 10 grader celsius, slik at $v(283)/v(288) = \sqrt{283/288} = 0.991$, dvs en reduksjon på ca 1%.
A

---

26) Intensitet i avstand 12 m: $I = P/A = P/4\pi R^2 = 80/4\pi \cdot 144 = 0.044$ W/m^2. Dermed: $\beta = 10 \log(0.044/10^{-12}) =$ 106 dB.
D

---

27) Grunntonen: $\lambda = 2L = 0.86$ m. Vi har videre $\lambda = v/f$ og $v = \sqrt{S/\mu}$. Dermed er $S = \mu(\lambda f)^2 = 0.0012 \cdot (0.86 \cdot 330)^2 = 97$ N.
C

---

28) Grunntonen i et rør som er åpent i begge ender: $\lambda = 2L$. Dermed: $L = \lambda/2 = v/2f = 340/2 \cdot 330 = 0.515$ m $= 515$ mm.
B

---

29) $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 2\pi/\sqrt{0.25 + 0.25 + 6.25} = 2\pi/\sqrt{6.75} = 2.418$ m, som gir $f = v/\lambda = 340/2.418 = 141$ Hz.
C

---

30) Bølgetallsvektorens komponent i xy-planet har lengde $k_{xy} = \sqrt{0.25 + 0.25} = \sqrt{0.50}$ m^{-1} og $k_z = 2.50$ m^{-1}. Dermed: $\alpha = \arctan(k_{xy}/k_z) = \arctan(\sqrt{0.50}/2.50) = 16°$.
A

---

31) Total energi i bølgepulsen er

$$E = \int dE = \int_{-\pi a/2}^{\pi a/2} \varepsilon(x) dx = \frac{S y_0^2}{a^2} \int_{-\pi a/2}^{\pi a/2} \sin^2(x/a)\, dx.$$

Vi substituerer $z = x/a$. Da er $dx = a\, dz$, og

$$E = \frac{S y_0^2}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 z\, dz.$$

Integralet er lik $\pi/2$, som en for eksempel innser ved å tegne opp $\sin^2 z$. Alternativt kan den oppgitte identiteten i formelvedlegget settes inn. Innsetting av tallverdier gir $E = 0.0038$ J $= 3.8$ mJ.
En kjappere løsning: E må være proporsjonal med S og y_0^2, basert på uttrykket for $\varepsilon(x)$. Av dimensjonsmessige grunner må da E også være proporsjonal med $1/a$. Den manglende tallfaktoren må være av størrelsesorden 1, slik at $E \simeq Sy_0^2/a = 40 \cdot 0.03^2/15 = 0.0024$ J $= 2.4$ mJ. Bare alternativ D er noenlunde i nærheten av dette.
D

---

32) Sirenens maksimale hastighet rett mot og rett fra deg er $2\pi r/T = 3.14/0.100 = 31.4$ m/s. Observert frekvens varierer dermed mellom $440 \cdot 340/(340 + 31.4) = 403$ Hz og $440 \cdot 340/(340 - 31.4) = 485$ Hz.
E

---

33) Konstruktiv interferens når $d \sin\theta = n\lambda$, slik at diffraksjonsgitteret har spalteavstand $d = 700/\sin 44.4° = 1000$ nm. Dermed konstruktiv interferens med fiolett laserlys i retninger gitt ved $\theta = \arcsin(n \cdot 400/1000) = 0°, \pm 23.6°, \pm 53.1°$.
B

---

34) Dersom mikrofonen flyttes en halv bølgelengde den ene eller den andre veien, blir endringen i veilengdeforskjell mellom de to lydbølgene en hel bølgelengde, dvs konstruktiv interferens igjen dersom vi hadde det i utgangspunktet. Her er bølgelengden $\lambda = v/f = 340/1700 = 0.20$ m $= 20$ cm, dvs det er 10 cm fra et intensitetsmaksimum til det neste.
D

---

35) Vi er på dypt vann. Da er $\tanh(kD) \simeq 1$, og $\omega(k) \simeq \sqrt{gk}$. Bølgepakkens gruppehastighet er

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{g/4k} = \sqrt{g\lambda/8\pi} = 1.4\,\mathrm{m/s}.$$

C

---

36) Keplers 3. lov gir for Venus' midlere avstand a_V til Sola:

$$a_V = 150\,\mathrm{Gm} \cdot (0.615/1)^{2/3} \simeq 108\,\mathrm{Gm}.$$

A

---

37) Tyngdens akselerasjon er proporsjonal med planetens masse og omvendt proporsjonal med kvadratet av planetens radius, dvs omvendt proporsjonal med volumet opphøyd i 2/3. Dermed er tyngdens akselerasjon på Venus' overflate

$$g_{\mathrm{Venus}} = g \cdot 0.815/0.866^{2/3} = 0.90\,g.$$

C

---

38) Siden $g(r) \sim 1/r^2$ og vi skal finne høyden h som gir $g(R+h) = g(R)/4$, blir ligningen $1/(R+h)^2 = 1/4R^2$, dvs $R + h = \sqrt{4}R = 2R$, dvs $h = 2R - R = R = 6370$ km.
E

---

39) Relativistisk impuls: $p = \gamma mv$, der $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Her er $v_1 = 0.2c$, og vi skal finne hvilken verdi av v_2 som gir $p_2/p_1 = 2$. Innsetting gir en ligning med kun v_2 som ukjent, og løsningen av denne er $v_2 \simeq 0.38c$.
B

40) Einsteins addisjonsformel gir

$$v_{BA} = \frac{v_{BC} + v_{CA}}{1 + v_{BC} v_{CA}/c^2} = 1.80c/1.81 = 0.99c.$$

E

---

41) Vi har sammenhengen $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, som gir

$$m = \sqrt{E^2 - (pc)^2}/c^2 = \sqrt{11}\,\mathrm{GeV}/c^2 = 5.9 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}.$$

D

---

42) $K = (\gamma - 1) m_p c^2 = 800 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 1.28 \cdot 10^{-10}$ J, slik at $\gamma = 1 + 1.28 \cdot 10^{-10}/1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 1.85$. Da kan vi finne protonenes hastighet: $1 - v^2/c^2 = 1/\gamma^2 = 0.29$, slik at $v = c\sqrt{1 - 0.29} = 0.84\,c$.
A

---

43) Vi har

$$pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{(mc^2 + mc^2)^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{3}mc^2,$$

slik at $p = \sqrt{3}mc$.
C

---

44) Vi har $\Delta x_a = 0$, $\Delta t_a = 4.5$ ns og $\Delta t_b = 7.5$ ns, og Δx_b skal bestemmes. Vi bruker Lorentztransformasjonene:

$$\Delta t_b = \gamma \left(\Delta t_a + \frac{v}{c^2} \Delta x_a \right) = \gamma \Delta t_a,$$

slik at $\gamma = 7.5/4.5 = 5/3$, dvs $v = 4c/5$, hastigheten til a relativt b. Dermed:

$$\Delta x_b = \gamma \left(\Delta x_a + v \Delta t_a \right) = \gamma v \Delta t_a = \frac{5}{3} \cdot \frac{4c}{5} \cdot 4.5\,\mathrm{ns} = 1.8\,\mathrm{m}.$$

B

---

45) Du måler et dopplerskift av frekvensen gitt ved

$$\overline{f} = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\, f,$$

og dermed (siden $c = \lambda f$, dvs $f = c/\lambda$) et dopplerskift av bølgelengden gitt ved

$$\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}\, \lambda.$$

Løsning av denne ligningen mhp din hastighet v gir, med $k = (\overline{\lambda}/\lambda)^2 = (700/400)^2 = 49/16$,

$$v = c \cdot \frac{k - 1}{k + 1} = c \cdot \frac{33}{65} = 0.51c.$$

C
