Løsningsforslag, eksamen FY1001/TFY4109 H16:

1) B:
Bevegelse med konstant akselerasjon. $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2;\quad x = v_0 t \cos\alpha$ der v_0 er utgangshastigheten, og α er utgangsvinkelen. Vi finner tiden det tar før golfballen når bakken igjen: $y = 0 \Rightarrow t(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t) = 0 \Rightarrow t = 0 \ \vee \ t = 2v_0 \sin\alpha / g$. Velger den ikke-trivielle løsningen og eliminerer t v.h.a. ligningen for x. Da får vi:
$$\frac{x}{v_0 \cos\alpha} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{xg}{2\sin\alpha\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{xg}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{2xg}$$
$$= \sqrt{500\cdot 9.81}\ \text{m/s} \ \approx 70.0\ \text{m/s}$$

2) D:
Fullstendig uelastisk støt,): impulsbevaring:
$$\vec{p}_{før} = \vec{p}_{etter} \Rightarrow M_1 v = \left(M_1 + M_2\right) u \Rightarrow u = M_1 v / \left(M_1 + M_2\right)$$

3) B:
Hastighetsforløpet er ikke symmetrisk opp og ned skråplanet fordi friksjonen skifter retning, mens tyngdekraften forblir den samme.

4) A:
Kassene og snora har alle samme akselerasjon. I innfestingen til kassen til venstre, vil denne akselerasjonen kun virke på kassens masse m. Dermed blir krafta S=ma.

5) A:

Terminalhastighet i det likevekt er oppnådd, dvs:
$$Dv^2 = mg \Rightarrow v = \sqrt{mg / D} = \sqrt{\frac{0.4\cdot 9.81}{0.0115}\cdot\frac{\text{m}^2}{s^2}} \approx 18.5\ \text{m/s}$$

6) D:
Idet bilen mister kontakten med underlaget vil normalkraften forsvinne. Dette skjer når sentripetalakselerasjonen tilsvarer tyngdens akselerasjon. På toppen av bakken er de to parallelle, så vi kan regne skalart
$$m\frac{v^2}{r} = mg \Rightarrow v = \sqrt{gr} = \sqrt{9.81\cdot 30}\ \text{m/s} \approx 17\text{m/s}$$

7) E:
Likevekt i felles knutepunkt=> $\vec{S}_3 = m\vec{g} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$
x-komp: $\frac{\sqrt{2}}{2} S_1 = \frac{1}{2} S_2 \Rightarrow S_2 = \sqrt{2} S_1$

y-komp:

$$S_3 = mg = \tfrac{\sqrt{2}}{2} S_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} S_2 = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}) S_2$$
$$\Rightarrow S_3 > S_2 > S_1$$

8) D:
Maks snordrag før personen letter er S=mg. Teller opp og finner at kassa løftes v.h.a 7 like store snordrag. Dvs. S=Mg/7, som gir: M < 7m.

9) B:

N2: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{dm}{dt}\vec{v} + m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

For at hastigheten skal kunne holdes konstant må vi tilføre en effekt som dekker kostnaden ved massetilførselen, og siden v holdes konstant bidrar bare første ledd på høyre side.

Effekten blir: $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \dfrac{dm}{dt} v^2 = 1.5 \cdot 4\text{W} = 6\text{W}$

Jeg så når jeg gikk rundt på eksamen at noen av dere tok utgangspunkt i kinetisk energi K= ½ m v^2, og endte opp med P= dK/dt = ½ dm/dt v^2, altså halvparten av svaret over. Feilen med denne tilnærmingen er at K på denne formen forutsetter konstant masse (K ble utledet fra arbeid hvor kraften som inngikk i arbeidsintegralet var på formen F= mdv/dt, altså forutsetter K på denne formen at endringen i kinetisk energi skyldes hastighetsendring.) Om du gjør arbeidsbetraktninger med kraft på formen F= dm/dt v, vil K= mv^2 og du ender du opp med riktig svar.

10) E:
N2, stive legemer, dvs. kan betrakte translatorisk bevegelse som om kraften virker i massesenteret. Siden kraften er den samme i alle tilfellene, vil akselerasjonen bli den samme. NB! 2,3 og 4 vil dreie litt i tillegg.

11) E:
Uniform sirkelbevegelse, polarkoordinater: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi); \mathrm{y}(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.
Vi har gitt startbetingelsen:
$x(t=0) = A = A\cos(\varphi); y(t=0) = A\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = n \cdot 2\pi,\ \text{n=0,1,...}$.
Vi velger φ=0 slik at faseskiftet forsvinner, og bruker i tillegg at ω=2πf.

12) C:
Her ser du at det kun er C som gir en «riktig form» på krafta, siden fjærkraften øker med utslaget (= avstanden). A gir en statisk tilstand, og evt. et sammenbrudd av systemet for at kvarkene skal kunne endre sin innbyrdes avstand, mens B ikke gir noen form for vekselvirkning. D tilsvarer en kraft som reduseres med avstanden (kan være attraktiv

eller repulsiv), mens alternativ E vil tilsvare en frastøtende vekselvirkning som avtar med avstanden.

13) C:

Skivas treghetsmoment er $I = \frac{1}{2}MR^2$ og den kinetiske rotasjonsenergien blir

$$K_{rot} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{4}MR^2(2\pi/T)^2$$
$$= \pi^2 MR^2/T^2 = \pi^2 \frac{1200\cdot 0.75^2}{\left(60/3000\right)^2}\text{ J} \approx 17\text{ MJ}$$

14) A:

Dreieimpulsbevaring:

$$L_1 = I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = L_2 \Rightarrow \omega_2 = I_1\omega_1/I_2$$
$$\Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = 2\pi(\tfrac{1}{\omega_2} - \tfrac{1}{\omega_1})$$
$$= -\frac{2\pi}{\omega_1\omega_2}\Delta\omega = \frac{2\pi I_2}{\omega_1 I_1}\cdot\left[1 - I_1/I_2\right] = \left[\frac{I_2 - I_1}{I_1}\right]T_1$$
$$= T_1\frac{(R+\Delta R)^2 - R^2}{R^2} = T_1\frac{2R\Delta R + \Delta R^2}{R^2} \approx \frac{2\Delta R}{R}T_1$$
$$= 24\cdot 60\cdot 60\cdot 2\cdot\frac{0.0017}{100}\text{s} \approx 2.94\text{ s}$$

15) A:

Hjulet roterer med klokka, altså ligger dreieimpulsen langs retninga angitt ved vektor nr 3. Fra N2-rot får vi: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$, altså må dreiemomentet være rettet motsatt av dreieimpulsen for at denne skal bremses opp.

16) C:

Tyngdekraften akselererer sylinderen, og gir den kinetisk energi, noe som tilsvarer positivt arbeid. Friksjonskraft rettet oppover skråplanet bidrar til at en andel av sylinderens potensielle energi konverterer direkte til kinetisk rotasjonsenergi (på bekostning av translasjonsenergi).

17) A:

Energibevaring:

$$U = Mgh = K_{trans} + K_{rot} = \tfrac{1}{2}M\left(v^2 + c(R\omega)^2\right) = \tfrac{1}{2}Mv^2(1+c)$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}} \overset{kule}{=} \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

Altså er hastigheten kun bestemt av starthøyden og legemets geometriske form (og verken legemets masse eller radius).

18) B:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{Gm}{R}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{Gm}} R^{3/2}$$

): Omløpstiden kun avhengig av baneradien, ikke planetmassen. Dermed vil den innerste planeten, med den korteste baneradien få kortest omløpstid.

19) B:

Tar utgangspunkt i potensialet, V. For tilfellet gravitasjon må $V \leq 0$ i hele R^3 siden det skal være attraktivt. I tillegg må V være symmetrisk om midtpunktet siden asteroidene har samme masse. Dermed gjenstår bare B og C som mulige løsninger.

Ser så på g. Siden feltet relaterer til en konservativ kraft må potensialet oppfylle

$$V = \frac{U}{m} = -\frac{1}{m}\int \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\int \vec{g} \cdot d\vec{r} \;\Rightarrow \vec{g} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} = \left(-\nabla V\right)$$

M.a.o må g tilsvare den negative gradienten til V. Ser at dette tilsvarer alternativ B.

20) D:

$\omega_0 = \sqrt{k/m} \approx 12.6\ \mathrm{s}^{-1}$. Startbetingelsene gir at y(0)=-0.1, og at v(0)=0. Bruker generell løsning fra formelarket, og deriverer denne med hensyn på tiden for å finne v(t). Vi får:

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi); \quad v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\text{):}\;\; v(0) = 0 = A\omega_0 \sin\varphi \Rightarrow \varphi = \pm n \cdot \pi,\; n = 0,1,..$$
$$\text{og: } y(0) = A\cos(\varphi) = -0.1 < 0 \Rightarrow n = 1,3,5,..$$

hvor vi har tatt hensyn til at alle løsningene har positiv amplitude, hvilket gjør at cosφ<0. Dermed er løsning D den eneste som gjenstår.

21) D:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \Rightarrow t = -\frac{1}{\gamma}\ln(A(t)/A_0)$$

Antall perioder:

$$\frac{t}{T} = -\frac{\omega}{2\pi\gamma}\ln(A(t)/A_0) = -\frac{\sqrt{km - \frac{b^2}{4}}}{\pi b}\ln(A(t)/A_0)$$
$$\approx -\frac{\sqrt{km}}{\pi b}\ln(A(t)/A_0) = \frac{\sqrt{20 \cdot 0.02}}{0.02 \cdot \pi}\ln(5) \approx 16.2$$

22) C:

Kritisk demping: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = 0 \Rightarrow b = \sqrt{4km} = \sqrt{4 \cdot 20 \cdot 0.02} \approx 1.26\,\mathrm{Ns/m}$

23) E:
Partikkelhastigheten er dy/dt og bølgen forplanter seg mot høyre. Dermed vil massepunkt 2 og 6 være i bevegelse oppover, mens punkt 3 og 5 beveger seg nedover. I øyeblikksbildet befinner punkt 1 og 4 seg h.h.v. på en lokal bølgetopp og i en lokal bølgedal, og vil dermed stå i ro.

24) E:
Høyttaleren akselererer i tyngdefeltet slik at kildehastigheten v_s øker monotont s.f.a tiden. Antar at lufta står i ro (v_m =0). Observatøren står i ro (v_0 =0), og høyttaleren beveger seg vekk fra observatøren, dvs v_s<0. Dopplerskiftet blir da $\Delta f = v/(v-v_s) - 1 < 1$, altså blir frekvensen lavere og avtagenede med økende kildehastighet.

25) D:
Bølgetoppenes avstand er ganske enkelt bølgelengden. Dette ser du om du lar $\vec{r}$ være en avstand λ i bølgens forplantningsretning, altså parallelt med $\vec{k}$. Da blir skalarproduktet i bølgefasen $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr = \frac{2\pi}{\lambda}\lambda = 2\pi$, altså en hel periode (f.eks. fra bølgetopp til bølgetopp). Dermed gjenstår det bare å finne bølgelengden. Vi har

$$\left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{9 + 5.1^2 + 2.1^2}}\,\mathrm{m} \approx 1.0\ \mathrm{m}$$

26) A:
Bølgeamplitudene leses av i figuren, og har forhold 2/3. Bølgene har samme frekvens, samme bølgelengde (sett fra figur), og dermed samme hastighet. Dermed er det kun amplitudene som er forskjellige, så forholdet mellom effektene blir 4/9.

27) A:
Når strengen strammes (S øker), øker v og dermed ω. Dermed må strengen være understemt (stemt for lavt). 4 beats tilsvarer en svevefrekvens på 4 Hz, altså er differansen mellom stemmegaffel og streng på 4 Hz.

28) C:
Ser av figuren at bølgene er faseforskjøvet med en kvart periode, altså π/2.
Bruker superposisjonsprinsippet, og faseskifter bølgene med $\pm\frac{\pi}{4}$ slik at de er skiftet π/2 i forhold til hverandre.

$$A_{tot}\cos(kx-\omega t) = A(\cos(kx-\omega t+\tfrac{\pi}{4})+\cos(kx-\omega t-\tfrac{\pi}{4})$$
$$= A(2\cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(kx-\omega t)-\sin(\tfrac{\pi}{4})\sin(kx-\omega t\tfrac{\pi}{4})+\sin(\tfrac{\pi}{4})\sin(kx-\omega t\tfrac{\pi}{4}))$$
$$= 2A\cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(kx-\omega t)$$

$$\Rightarrow A_{tot} = 2A\cos(\tfrac{\pi}{4}) = 2\tfrac{\sqrt{2}}{2}1\text{ mm} = \sqrt{2}\text{ mm}$$

29) E:

Begge bølgene har bølgelengder tilsvarende 4 enheter på skalaen. De må begge forplante seg et odde antall halvperioder (minst 3λ/2) for å overlappe i en stående bølge, altså vil nodene finnes i alle odde tallverdier langs skalaen.

30) C:

Kan bruke hvilken som helst av verdiene, men høyest vinkel gir størst nøyaktighet (se neste oppgave). Får:

$$d = \frac{n\lambda}{\sin\theta} = \frac{4\cdot 5\cdot 10^{-7}}{\sin 41.8}\text{m=}3.0\cdot 10^{-6}\text{m}$$

31) B:

Feilforplantning gir:

$$\Delta d^2 = \left(\frac{\partial d}{\partial\lambda}\Delta\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial\theta}\Delta\theta\right)^2 = \left(\frac{d}{\lambda}\Delta\lambda\right)^2 + \left(-\frac{d}{\tan\theta}\Delta\theta\right)^2$$
$$\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\theta}{\tan\theta}\right)^2$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta d}{d} = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\cdot 10^{-2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{1800\tan\theta}\right)^2}$$

Ser fra uttrykket at høyest mulig vinkel gir minst feilforplanting. Setter inn for θ=41.8º og får

$$\frac{\Delta d}{d} = 2.8\cdot 10^{-3} \Rightarrow \Delta d = 3\cdot 2.8\cdot 10^{-9} \approx 8.4\text{ nm !}$$

Interferensmålinger gir veldig høy presisjon, se f.eks. interferometeret brukt i LIGO-eksperimentet der man nylig påviste gravitasjonsbølger/gravitoner. Se f.eks: https://www.quantamagazine.org/20160211-gravitational-waves-discovered-at-long-last/

32) C:

Hastighet i S:

$$u_x = (\bar{u}_x + v)/(1+\bar{u}_x v/c^2) = (0.3c+0.69c)/(1+0.3\cdot 0.69) = \frac{0.99}{1.207}c \approx 0.82\text{c}$$

33) C:

$$E_f = p_f c = K_e + m_0 c^2 = (100 + \tfrac{9.1 \cdot 9}{1.6 \cdot 1000})\ \text{keV} \approx 612\ \text{keV}$$

Målt i angitte enheter blir dermed fotonets impuls ~ 612 keV/c.

34) D:

Energibetraktning: Endringen i systemets totale energi må tilskrives friksjonstap mellom B og skråplanet, siden det ikke er noe tap i trinsa.

Vi finner

$$E_{tap} = -\int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{l} = \mu_k m_B g h \cos\alpha = \Delta E$$

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \Delta U_A + \Delta U_B - K_A - K_B - K_{rot}$$

$$\mu_k = \frac{E_1 - E_2}{m_b g h \cos\alpha} = \frac{1}{m_b g h \cos\alpha}\left[m_a g h - m_b g h \sin\alpha - \tfrac{1}{2}\left(m_A + m_B\right)v^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} m_t R_t^2 \frac{v^2}{R_t^2} \right]$$

$$= \frac{1}{m_b \cos\alpha}\left[m_a - m_b \sin\alpha - \tfrac{1}{2gh}\left(m_A + m_B + \tfrac{1}{2} m_t\right)v^2 \right]$$

Med tallverdier innsatt i siste uttrykk finner du $\mu_k \approx 0.16$

35) C:

Siden sylindertettheten er halvparten av vannets, vil halve sylinderen synke nedi vannet. Kan vise dette v.h.a likevektsbetraktninger. Fra Arkimedes lov finner vi et uttrykk for oppdriftskrafta på sylinderen: $F_A = \rho_v \pi r_s^2 h_v g$ der h_v er nedsenkningslengden. N1 gir:

$$F_A - m_s g = 0 \Rightarrow \rho_v \pi r_s^2 h_v g = \rho_s \pi r_s^2 h g \Rightarrow h_v = \frac{\rho_s}{\rho_v} h = \frac{h}{2}$$

36) D:

For å kunne løse oppgaven, må du først finne resultantkraften på sylinderen når den beveger seg bort fra likevektsposisjonen. Tyngda av sylinderen er konstant, men oppdriften vil være mindre enn tyngden når sylinderen er ovenfor likevektsposisjonen, og større enn tyngden når sylinderen er dypere i vannet enn ved likevekt. Dermed gir balansen mellom tyngde og oppdrift ei kraft omvendt proporsjonal med utslag i forhold til likevekt. Vi bruker nettokrafta fra oppgave 35, dvs:

$$F = -\pi \rho_v r_s^2 g y = -K y$$

Hvor y nå er posisjonen til sylinderen relativt til likevektsposisjonen i y=0 (halvt nedsunket).

Vi finner ω på sedvanlig vis:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_s}} = \sqrt{\frac{\rho_v g}{\rho_s h_s}} = \sqrt{\frac{2g}{h_s}} = \sqrt{9.81}\ \mathrm{s}^{-1}$$

37) B:

Bruker standardløsning for tvunget svingning fra formelarket og finner svingehastigheten:

$$x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$
$$\Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

Effekten blir dermed:

$$\langle P(t)\rangle = b\langle v(t)^2\rangle = b\omega^2 A^2(\omega)\langle \cos^2(\omega t + \varphi(\omega))\rangle = \frac{b\omega^2 A^2(\omega)}{2}$$

b og ω er gitt ved tallverdier i oppgaveteksten, mens uttrykk for og A(ω) finnes i formelarket. Vi finner ved innsetting:

$$A(\omega) = \frac{m\omega_0^2 H_0 / m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = \frac{\omega_0^2 H_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

Som gir:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{b\omega^2\omega_0^4 H^2}{2\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{b}\,\omega}{m}\right)^2\right]}$$

Her kjenner vi alle størrelser, så vi setter inn tallverdier og finner P ~ 20 kW.

38) C:

Dreiemomentene for høyre og venstre hjul står 180 grader på hverandre, h.h.v. langs negativ og positiv z-akse. Dermed er det totale dreiemomentet på systemet 0, og i følge N2-rot vil da dreieimpulsen(e) være bevart. (Det er for øvrig uvesentlig hvilken vei hjula spinner, resultatet blir det samme).

39) E:

Her må vi holde tunga rett i munnen. På den siden som vender mot månen, vil tyngdekraften fra månen være motsatt rettet av den fra jorda, mens vi på diametralt motsatt side får tyngdekrefter som virker i samme retning. Vi kan bruke superposisjon på både krefter og felt. Jeg velger det siste:

$$\frac{\Delta g}{g_j}=\frac{1}{g_j(r_j)}(g_j(r_j)+g_m(r_{mj}+r_j)-(g_j(r_j)-g_m(r_{mj}-r_j)))=\frac{1}{g_j(r_j)}(g_m(r_{mj}+r_j)+g_m(r_{mj}-r_j))$$

$$=\frac{r_j^2 m_m}{m_j}\left(\frac{1}{\left(r_{mj}-r_j\right)^2}+\frac{1}{\left(r_{mj}+r_j\right)^2}\right)=\frac{r_j^2 m_m}{m_j}\left(\frac{\left(r_{mj}+r_j\right)^2+\left(r_{mj}-r_j\right)^2}{\left[\left(r_{mj}-r_j\right)\left(r_{mj}+r_j\right)\right]^2}\right)$$

$$=\frac{r_j^2 m_m 2\left(r_{mj}^2+r_j^2\right)}{m_j(r_{mj}^2-r_j^2)^2}\approx 6.76\cdot 10^{-6}$$

40) D:

Uelastisk og relativistisk => totalenergi og impuls bevart, lar 1 og 2 vise til protonene før støtet, og 3 til resultantpartikkelen. Energibevaring gir

$$E_3=\sqrt{p_3^2c^2+M_0^2c^4}=E_1+E_2=(\gamma+1)m_0c^2$$
$$\Rightarrow p_3^2c^2+M_0^2c^4=m_0^2c^4(\gamma+1)^2$$

Fra impulsbevaring har vi $\vec{p}_1=\vec{p}_3\Rightarrow p_3^2=p_1^2=\gamma^2m_0^2v^2$. Setter dette inn i energiligninga, og får:

$$M_0^2c^4=m_0^2c^4(\gamma+1)^2-\gamma^2m_0^2v^2c^2=m_0^2c^4\left[(\gamma^2-\gamma^2\tfrac{v^2}{c^2}+2\gamma+1\right]$$
$$=m_0^2c^4(\gamma^2(1-\tfrac{v^2}{c^2})+2\gamma+1)=2m_0^2c^4(\gamma+1)$$

Vi kan bytte ut Lorentsfaktoren med K v.h.a. følgende sammenheng:

$$E_1=\gamma m_0c^2=K+m_0c^2\Rightarrow\gamma=(1+\tfrac{K}{m_0c^2})$$

Altså får vi:

$$\left(\frac{K}{2m_0c^2}+1\right)=\frac{M_0^2c^4}{4m_0^2c^4}$$
$$=> K=\frac{M_0^2c^4}{2m_0c^2}-2m_0c^2$$

Vi setter inn tallverdier fra oppgaven, og får:

$$K=\frac{(150\ \mathrm{GeV})^2}{2\cdot\frac{1.67\cdot 9}{1.6}\cdot 10^{-1}\mathrm{GeV}}-2\cdot\frac{1.67\cdot 9}{1.6}\cdot 10^{-1}\mathrm{GeV}\approx 12000\ \mathrm{GeV}$$