Løsningsforslag, eksamen FY1001 14. desember 2017

1) 3 områder av $\Delta t = 4$ s, a konstant i hvert omrde.
$1 : a_1 = 0; v_0 = 5m/s$
$\Longrightarrow x_1 = v_0\Delta t; v_1 = v_0$
$2 : a_2 = \Delta v/\Delta t = 1.25 \text{ m/s}^2$
$\Longrightarrow x_2 = x_1 + v_1\Delta t + \frac{a_2(\Delta t)^2}{2} = 2v_0\Delta t + \frac{a_2(\Delta t)^2}{2}; v_2 = v_0 + a_2\Delta t$
$3 : a_3 = -2.5 \text{ m/s}^2$
$\Longrightarrow x_3 = x_2 + v_2\Delta t + \frac{a_3(\Delta t)^2}{2} = 3 \cdot v_0\Delta t + \frac{3a_2(\Delta t)^2}{2} + \frac{a_3(\Delta t)^2}{2} = (60 + 30 - 20) \text{ m} = 70 \text{ m}.$
SVAR: D

2) $v_{x0} = v\cos\alpha; v_{y0} = v\sin\alpha; v_y = v_{y0} + gt; y = v_{y0}t + \frac{gt^2}{2}$
$\Rightarrow t^2 + \frac{2v_{y0}t}{g} - \frac{2y}{g} \Rightarrow t = -\frac{v_{y0}}{g} \pm \frac{\sqrt{v_{y0}^2+2yg}}{g}$
Velger løsning med $t > 0$: $\Rightarrow x = v_{x0} \cdot t = \frac{v\cos\alpha}{g}(\sqrt{(v\sin\alpha)^2 + 2yg} - v\sin\alpha) \simeq 9$ m
SVAR:C

3) $F_{tot} = m_{tot}a_x \vee F_B = m_B a_x \Rightarrow F_B = \frac{m_v}{m_{tot}}F_{tot} = 60$ N. SVAR: A

4) Normalkreftene som virker i kontaktpunktet mellom stenene i støtet er slik at $\vec{N_{21}} = -\vec{N_{12}}$ vil være rettet opp mot venstre. Sten 1 har dessuten dreieimpuls, så det vil også virke friksjonskrefter i støtet, $\vec{f_{21}} = -\vec{f_{21}}$. For sten 1 vil denne være rettet nedover mot venstre, tangensielt ut fra kontaktpunktet. Totalt vil dermed summen av kontaktkreftene som virker i støtet være rettet mot venstre for sten 1, i en retning som ligger mellom de to kraftkomponentene i støtet, $\vec{N_{21}}$ og $\vec{f_{21}}$, og tilsvarene motsatt rettet på sten 2. Det er kun figuren i svar A som er et mulig alternativ. SVAR A

5) N1: $\sum \vec{F} = (N + ky - mg)\hat{y} = 0 \Rightarrow N = mg - ky = 51.1$ N. SVAR C

6) N1 og dekomponering gir $y : mg\cos\theta - N = 0 \vee x : mg\sin\theta - f_s = mg\sin\theta - \mu_s mg\cos\theta = 0$
$\Rightarrow \mu_s \geq \tan\theta \Rightarrow \theta \leq \arctan\mu_s \simeq 16.7°$. SVAR D.

7) Energibevaring gir: $\Delta U = 3mgh = \Delta K = \frac{1}{2}4mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3gh}{2}}$. SVAR B

8) Siden støtet er uelastisk, er kun $\vec{p}$ bevart.
Fr støt: E bevart $\frac{mv_f^2}{2} = mgL \Rightarrow v_f = \sqrt{2gL}$
Støt: $mv_f = 3mv_e \Rightarrow v_e = v_f/3$
Etter støt: E bevart $\frac{3mv_e^2}{2} = 3mgh \Rightarrow h = \frac{v_e^2}{2g} = \frac{2gL}{18g} = \frac{L}{9}$. SVAR E

9) La avstandsvektoren fra pkt A til de to hengende massene være $\vec{R_1}$ og $\vec{R_2}$ for hhv venstre og høyre masse. Den totale dreieimpulsen om A blir: $\vec{L_A} = I_0\vec{\omega} + m(\vec{R_1} \times \vec{v_1} + \vec{R_2} \times \vec{v_2}) = (\frac{mr^2}{2}\frac{v}{r} + m(rv + rv))\hat{\omega}$
$\Rightarrow L_A = \frac{1}{2}(mrv + 4mrv) = \frac{5}{2}mrv$. SVAR C.

10) N2 gir: $\sum \vec{F} = ma\hat{x} = \vec{S} - mg\hat{y} \Rightarrow ma = S_x = Ssin\theta = m\sqrt{a^2+g^2}sin\theta$, hvor θ er utslagsvinkelen i forhold til loddlinja. Vi finner: $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{g^2+a^2}} \Rightarrow \theta = 14.3°$, med klokka ut fra loddlinja, altså mot fartsretningen. SVAR C.

11) Alle krefter virker i vertikalretningen. Oppdriftskrafta $F_o = \rho_v V_k g = \frac{\rho_v V_k}{M} Mg = \frac{\rho_v V_k}{\rho_k V_k} Mg = Mg\frac{\rho_v}{\rho_k}$. N2 gir:

$$\sum \vec{F} = Ma_y\hat{y} = G - F_o - f_l \Rightarrow Ma_y = Mg(1-\frac{\rho_v}{\rho_k}) - bv$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g(1-\rho_v/\rho_k) - bv/M \Rightarrow \frac{dv}{1-\rho_v/\rho_k - bv/Mg} = gdt$$

Setter $u = 1 - \rho_v/\rho_k - bv/Mg \Rightarrow du = -\frac{b}{Mg}dv$ inn for v, dv i diff.ligninga overfor, og får:

$$\int_{1-\rho_v/\rho_k}^{1-\rho_v/\rho_k - bv/Mg} \frac{du}{u} = -\frac{b}{M}\int_0^t dt \Rightarrow \ln(\frac{1-\rho_v/\rho_k - bv/Mg}{1-\rho_v/\rho_k}) = -bt/M$$

$$\Rightarrow -\frac{bv}{Mg} = (1-\frac{\rho_v}{\rho_k})\exp(-bt/M) - (1-\frac{\rho_v}{\rho_k}) = (1-\frac{\rho_v}{\rho_k})(\exp(-bt/M)-1)$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{Mg}{b}(1-\frac{\rho_v}{\rho_k})(1-\exp(-bt/M))$$

.
Svar D.

12) Konstant vinkelakselerasjon, så $\omega_1 = \alpha t_1$, og $\phi_1 = 10\cdot 2\pi = \frac{1}{2}\alpha t_1^2$. Videre m $\omega_2 = 2.5\omega_1 = \alpha t_2 = \alpha 2.5 t_1$. Dermed: $\phi_2 = \frac{1}{2}\alpha t_2^2 = 2.5^2(\frac{1}{2}\alpha t_1^2) = 6.25\cdot\phi_1$, og$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 5.25\cdot phi_1 = 52.5\cdot 2\pi$. SVAR C

13) N2: $\sum F = m_{tot}a = 2ma = mg \Rightarrow a = g/2$. SVAR C.

14) N2: $\sum F = m_{tot}a = 2ma = mg - f$, og N2-rot: $\sum \tau = fR = I\alpha = Ia/R = (2/5)mRa \Rightarrow f = (2/5)ma$. Setter inn resultatet for f i ligninga fra N2, og får: $a = \frac{mg}{2m(1+1/5)} = \frac{5g}{12}$. SVAR D.

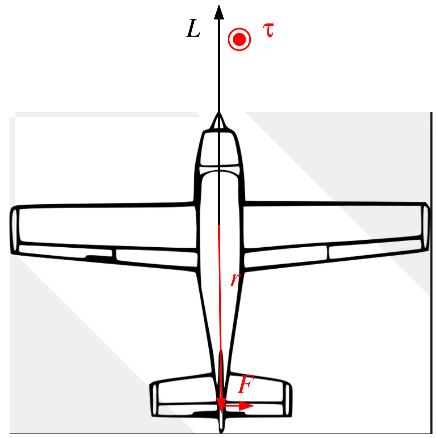
15) N2: $\sum F = m_{tot}a = 2ma = mg - f = mg - \mu N = mg(1-\mu) = 0.9mg \Rightarrow a = 0.9/2g = 0.45g$. SVAR B

16) Siden det er ren rulling i oppgave 14), er den totale mekaniske energien bevart om vi kan se bort fra rullefriksjon. Vi fr $K_{tot} = K_{rot} + K_{trans} = \frac{1}{2}I_0\omega^2 + \frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{2}(\frac{2}{5}mr^2v^2/r^2 + 2mv^2) = \frac{1}{5}mv^2 + mv^2 = \frac{6}{5}mv^2$, s rotasjonsandelen blir $K_{rot}/K_{tot} = \frac{1/5}{6/5} = 1/6$. SVAR A.

17) Har $K = ke^2/r = 1/2mv^2 \Rightarrow v^2 = 2ke^2/mr$ og $L = n\hbar = mvr \Rightarrow v^2 = (n\hbar/mr)^2$. Dermed får vi: $r = (n\hbar/e)^2(2km)^{-1} = n^2 r_0$.
$\Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 4$. SVAR D.

18)

I figuren til høyre vises propellens dreieimpuls $\vec{L}$, samt dreiemoment $\vec{\tau}$ (rettet ut av figurplanet) forårsaket av krafta, $\vec{F}$, som må til for å svinge flyet til venstre. Fra N2-rot har vi $\vec{\tau} = d\vec{L}dt$, så venstresvingningen gir et løft på snuten av flyet, m.a.o. stigning.
SVAR D.



19) Impulsbevaring: $p_f = 0 = p_e \Rightarrow mv = 4mv_4 \Rightarrow v = 4v_4$. Energibev.: $U = K_{tot} = \frac{1}{2}(mv^2 + 4mv_4^2) = \frac{1}{2}(m(4v_4)^2 + 4mv_4^2) = 2mv_4^2(4+1) = K_m + K_{4m}$. Dermed fås: $(K_m/K_{tot}) = 4/5 \vee (K_{4m}/K_{tot}) = 1/5$. SVAR E.

20) $U = mgh$ for alle tre. Legeme nr. 2 og 3 er kun utsatt for statisk friksjon, og mister dermed ingen mekanisk energi. Siden $K = K_{rot} + K_{trans}$ og K_{trans} er størst for legeme nr. 3, må $I_3 < I_2$. Uansett, $K_2 = K_3$. Legeme nr. 1 er utsatt for kinematisk friksjon, så her går det mekanisk energi tapt til varme i underlaget. Ergo må $K_1 < K_2 = K_3$. Vi kan også se at K_{trans} må være lik for legeme 1 og 2, men siden legeme 1 ikke har noe rotasjonsbidrag vil klossen ha lavere total kinetisk energi enn legeme nr. 2. SVAR A.

21) Dreieimpulsbevaring: $L_0 = I_0\omega_0 = I_1\omega_1 = L_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{I_0}{I_1}\omega_0 = \frac{2mr^2}{6mr^2}\omega_0 = \omega_0/3$. SVAR B.

22) $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 12\ \mathrm{s}^{-1}$.
Startbet:

$$x(t=0) = x_0 = A\sin\phi \Rightarrow A = \frac{x_0}{\sin\phi}$$

$$v(t=0) = A\omega_0\cos\phi = x_0\omega_0\cot\phi = v_0 \Rightarrow \tan\phi = \frac{x_0\omega_0}{v_0} = \frac{0.5\cdot 12}{-6} = -1$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi\cdot n$$

$$\Rightarrow A = x_0/\sin\phi = 0.5\cdot 2/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}.$$

SVAR E.

23) N2-rot:

$$\sum\tau = I\ddot{\theta} = -D\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \vee \omega_0^2 = D/I_0$$

$$I_0 = \frac{D}{\omega_0^2} = \frac{D\cdot T^2}{4\pi^2} = 0.065\,\mathrm{kgm}^2$$

SVAR B

24)

$$\left(\frac{\Delta I_0}{I_0}\right)^2 = \frac{1}{I_0^2}\left[\left(\frac{\partial I}{\partial D}\right)^2 \Delta D^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)^2 \Delta T^2\right] = \frac{\Delta D^2}{D^2} + \frac{1}{4}\frac{\Delta T^2}{T^2}.$$

Vi lar $T = t/n$ der t er måletiden og n er antall svingninger, og får dermed:

$$\frac{\Delta T^2}{T^2} = \frac{1}{T^2}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 \Delta t^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^2 \Delta n^2\right] = \frac{\Delta t^2}{t^2} + \frac{\Delta n^2}{n^2}.$$

Dermed:

$$\frac{\Delta I_0}{I_0} = \sqrt{\frac{\Delta D^2}{D^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta t^2}{t^2} + \frac{\Delta n^2}{n^2}\right)} \simeq 0.036$$

SVAR D

25) Med tidsmidling: Man kan mer eller mindre direkte bruke de uttrykkene som står i formelvedlegget for midlere energitetthet i bølger, f.eks. på en streng, og huske at hvert pkt langs strengen er en harmonisk oscillator. Det gir:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\bar{E}}{x} \Rightarrow \langle E \rangle_T = \bar{E} = \bar{\epsilon} x = \frac{1}{2} m\omega^2 \left\langle A^2(t) \right\rangle_T, \text{ hvor} A(t) = A_0 \exp(-\gamma t).$$

Tidsmiddel blir:

$$\left\langle A^2 \right\rangle_T = A_0^2 \frac{\int_t^{t+T} \exp(-2\gamma) dt}{\int_t^{t+T} dt} = A_0^2 c_1 \exp(-2\gamma t),$$

hvor c_1 er en konstant.

$$\Rightarrow \frac{E}{E_0} = \frac{1/2 m\omega^2 c_1 A_0^2 \exp(-2\gamma t)}{1/2 m\omega^2 c_1 A_0^2} = \exp(-2\gamma t)$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{2\gamma} \ln\left(\frac{E}{E_0}\right) = -\frac{m_e}{b} \ln(0.01) \simeq 24\text{ns}$$

Kan ogs finnes uten å bruke formelsamling. Svingeenergi:

$$E(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} A^2 \exp(-\gamma t)^2 (k \sin^2(\omega t + \phi) + m\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi)) = \frac{1}{2} k A^2 \exp(-2\gamma t)$$

Resten blir som over. SVAR B

26) $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{2k/m} \simeq 3.36$ s. SVAR E

27) $k = \frac{2\pi}{\lambda} \simeq 8.16\text{m}^{-1}$, $\omega = 2\pi f \simeq 747.7\text{s}^{-1}$, $\vec{k}|| - \hat{x} \;\Rightarrow y(x,t) = 0.013 \sin(8.16x + 747.7t)$. SVAR C

28) $v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(kx + \omega t) \;\Rightarrow \max(v_y) = A\omega \simeq 9.72$ m/s. SVAR A

29) $v = \omega/k = \sqrt{S/\mu} \Rightarrow \mu = Sk^2\omega^{-2} \simeq 6$ g/m. SVAR D

30) $I(r) = I_0/A(r)$, og for en sfærisk bølge er $A(r) = 4\pi r^2$, så $I(r = 1\text{m}) = I_0/4\pi$. Dermed fås: $I(r = 100\text{m}) = I(r = 1\text{m})/r^2 = 8.0 \cdot 10^{-4}\text{W/m}^2$. SVAR E

31) Med v_u og v_t som hastighetene til ubåt og torpedo, og med f_u, f_r, og f_m som frekvensene utsendt fra ubåt, reflektert fra torpedo og mottatt igjen i ubåt, får vi:

$$f_m = \frac{v+v_u}{v-v_t} f_r = \frac{v+v_u}{v-v_t}\frac{v+v_t}{v-v_u} f_u \Rightarrow v_t\left(\frac{f_m}{f_u}\frac{v-v_u}{v+v_u}+1\right) = v\left(\frac{f_m}{f_u}\frac{v-v_u}{v+v_u}-1\right)$$

$$\Rightarrow v_t = v\left[\frac{\left(\frac{f_m}{f_u}\frac{v-v_u}{v+v_u}-1\right)}{\left(\frac{f_m}{f_u}\frac{v-v_u}{v+v_u}+1\right)}\right] \simeq 95 \text{ km/h}$$

SVAR B

32) Intensitetsmaksima (konstruktiv interferens) når faseforskjellen mellom bølgene $\Delta\phi = 2\pi n$. Kun det romlige argumentet i bølgefunksjonen er av interesse (vi antar at ωt-argumentet er likt for begge bølgene). Vi får:

$$\vec{k_A}\vec{r_A} - \vec{k_B}\vec{r_B} = k(r_A - r_B) = k(x^2 + 100\lambda^2)^{1/2} - kx = 2\pi n \Rightarrow (x^2 + 100\lambda^2)^{1/2} - x = \frac{2\pi n}{k} = n\lambda$$

$$\Rightarrow x^2 + 100\lambda^2 = n^2\lambda^2 + 2n\lambda x + x^2 \Rightarrow 2n\lambda x = (100 - n^2)\lambda^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{\lambda}{2n}\left(100 - n^2\right).$$

Setter inn for stigende n-verdier, og finner:

$$n = 1 \rightarrow x = 49.5$$

$$n = 2 \rightarrow x = 24$$

$$n = 3 \rightarrow x = 15.17$$

$$n = 4 \rightarrow x = 10.5$$

$$n = 5 \rightarrow x = 7.5$$

$$...n = 8 \rightarrow x = 2.25$$

SVAR D

33)

$$v = \omega k^{-1} = \sqrt{S/\mu} \Rightarrow \omega = \sqrt{S/\mu}k \quad \Rightarrow \frac{d\omega}{dS} = \frac{k}{2\sqrt{S\mu}} \Rightarrow dS = \frac{2\sqrt{S\mu}}{k}d\omega$$

$$\frac{dS}{S} = 2\frac{\sqrt{S\mu}}{Sk}d\omega = 2\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{S}k}d\omega = 2\frac{d\omega}{\omega} = 2 \cdot \frac{4}{396} \simeq 0.024.$$

SVAR C

34)

$$g = -\frac{GM}{r^2}; \quad g_p = -\frac{GM/2}{r^2/4} = 2 \cdot \left(-\frac{GM}{r^2}\right) = 2g.$$

SVAR B

35)

$$U(R) = \frac{-GMm}{R}; \quad K(R) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR\frac{v^2}{R} = \frac{1}{2}mRa = \frac{1}{2}mRg = \frac{1}{2}mR\frac{GM}{R^2} = -\frac{1}{2}U(R)$$

$$\Rightarrow E(R) = U(R) + K(R) = \frac{1}{2}U(R) = \frac{-GMm}{2R}.$$

SVAR D

36) Hastighetsvektorene står normalt på baneradiene i de to skjæringspunktene. Bevaring av banedreieimpuls gir (kan også bruke energibevaring):

$$mr_1v_1 = mr_2v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

SVAR A

37) Siden vi er utenfor (på randen) av massefordelingen, blir $\vec{g}$ som om all masses var samlet i origo, :)

$$g = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{G\rho_0 \cdot 4\pi R^3}{3R^2} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0 R \simeq 24.8\text{ms}^{-2}.$$

Oppgaven kan også løses (mer tungvindt) ved å bruke den empiriske tetthetsfordelinga, og integrere opp all massen,

$$M = \int_V \rho dV = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = ...$$

SVAR D

38)

$$p_2 = \gamma_2 m v_2 = 4\gamma_1 m v_1 = 4p_1 \quad \Rightarrow \frac{v_2^2}{\gamma_1^2} = 16\frac{v_1^2}{\gamma_2^2} \quad \Rightarrow v_2^2\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) = 16v_1^2\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow v_2^2(c^2 - v_1^2 + 16v_1^2) = 16v_1^2c^2 \Rightarrow v_2^2 = 16\frac{v_1^2}{(c^2 + 15v_1^2)}c^2 = \frac{16}{25}\frac{c^2}{c^2(1 + 15/25)}c^2.$$

Siste ledd over fremkommer ved å sette inn for $v_1 = c/5$. Dermed får vi:

$$v_2 = \sqrt{\frac{16}{40}}c = \frac{2}{\sqrt{10}}c \simeq 0.63c.$$

SVAR C

39) Kan bruke tidsdilatasjon, eller sette rett inn i Lorentztransf. Det siste alternativet gir:

$$t = \gamma(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad t = \gamma\bar{t} \quad (= \text{tidsdilatasjon}).$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\bar{t}}{t} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{\bar{t}^2}{t^2}$$

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{\bar{t}}{t}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{1.2}{16}\right)^2} \simeq 0.9972c$$

SVAR D

40)Impuls og (total)energi bevart.

$$E_1 + m_2c^2 = E_3 = \sqrt{p_3^2c^2 + m_3^2c} \quad \vee \quad \vec{p_1} = \vec{p_3}.$$

Eliminerer nå p_3 og p_1 ved å bruke:

$$p_3^2c^2 = p_1^2c^3 = E_1^2 - m_1^2c^4.$$

Kvadrerer ligninga for energibevaring, og erstatter impulsene vha uttrykket over:

$$\left(E_1 + m_2c^2\right)^2 = E_1^2 - m_1^2c^4 + m_3^2c^4 \quad \Rightarrow \quad 2E_1m_2c^2 + m_2^2c^4 = (m_3^2 - m_1^2)c^4$$

$$\Rightarrow E_1 = K_1 + m_1c^2 = \frac{(m_3^2 - m_1^2 - m_2^2)}{2m_2}c^2 \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{\left[m_3^2 - (m_1 + m_2)^2\right]}{2m_2}c^2$$

SVAR B