Løsningsforslag, eksamen FY1001 16. desember 2019

1) $m = \rho \Delta V = \frac{4\pi\rho\left([r+\Delta r]^3 - r^3\right)}{3} = \frac{4\pi \cdot 19.32 \cdot \left((100+1\cdot 10^{-5})^3 - 100^3\right)}{3}\mathrm{g} = 24.3\mathrm{g}$

2) Pianoet rikker seg ikke, så netto kraft på pianoet er 0. Siden pianoet forblir i ro, er friksjonen statisk, og må ha samme tallverdi som skyvekraften, bare motsatt rettet, altså $f_s = 700$ N.

3) Sentripetalakselerert bevegelse. N2 gir $f_s = ma_\perp = mv^2/r$. Den statiske friksjonen har maksimal verdi $f_{max} = \mu N = \mu mg$, mens radien av rundkjøringa $r = o/2\pi$, hvor o er omkretsen. Dermed får vi kritisk hastighet når $2\pi m v_{krit}^2/o = \mu mg \Rightarrow v_{krit} = \sqrt{\frac{\mu g o}{2\pi}} \simeq 36$ km/t.

4) Dekomponerer tyngden og skyvekrafta F i komponenter som løper normalt på, og parallelt med underlaget. Kun det første settet komponenter er relevant mhp normalkraften. N1 normalt skråplanet gir:

$$\sum F_\perp = N - mg\cos\theta - F\sin\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta + F\sin\theta$$

5) Krafta F på hele systemet gir $a = F/2m$, slik at klossene beveger seg med samme akselerasjon og hastighet. Med masseløst tau og friksjonsfritt underlag, er nettokraft på venstre kloss $F_{netto,v.k.} = S = ma = mF/2m = F/2$.

6) Siden hastigheten er konstant, er ikke systemet akselerert, dvs netto kraft er 0. Med friksjon fra nedre kasse som eneste mulige horisontale kraft på den øvre kassa, må denne altså være 0.

7) Igjen: Konstant hastighet betyr at netto kraft på nedre kloss er 0, dvs. at friksjonen fra underlaget må kompensere trekkkraften, altså er tallverdien $f = F$.

8) Den underste massen m_1 vil akselerere oppover skråplanet, mens den øverste massen m_2 vil akselerere nedover planet. All bevegelse skjer langs skråplanet, så vertikale kraftkomponenter balanseres ut (N1). Snora er masseløs, taljas dreiemoment neglisjerbart, og vi skal se bort fra friksjon, så dermed må snordraget være konstant, og massenes akselerasjoner like store. Vi finner (N2):

$$m_1 a = S - m_1 g \sin\theta \Rightarrow S = m_1 a + m_1 g\sin\theta$$

$$m_2 a = m_2 g\sin\theta - S = m_2 g \sin\theta - m_1 g\sin\theta - m_1 a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g\sin\theta = \frac{g}{3}\sin\theta \simeq 1.12\mathrm{m/s^2}$$

9) N2 gir:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Dv^2 \Rightarrow \frac{m}{D}\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{D} - v^2 = v_T^2 - v^2 \Rightarrow \frac{dv}{v_T^2 - v^2} = \frac{D}{m}dt = \frac{g}{v_T^2}dt \Rightarrow \int_0^{v(t)} \frac{dv}{v_T^2 - v^2} = \frac{g}{v_T^2}\int_0^t dt$$

Integralet på venstre side er ikke trivielt, men ved bruk av hintet i oppgaveteksten, finner vi:

$$\int \frac{dv}{v_T^2 - v^2} = \frac{1}{v_T^2}\int \frac{dv}{1 - v^2/v_T^2}.$$

Substitusjon av $u = v/v_T \Rightarrow dv = v_T du$ i integralet, gir dermed:

$$\frac{1}{v_T}\int_0^{v(t)/v_T} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{v_T}\tanh^{-1}(u)|_0^{v(t)/v_T} = \frac{1}{v_T}(\tanh^{-1}(v(t)/v_T) - \tanh^{-1}(0)) = \frac{1}{v_T}\tanh^{-1}(v(t)/v_T) = \frac{gt}{v_T^2}$$

$$\Rightarrow \tanh(\tanh^{-1}(v(t)/v_T)) = \frac{v(t)}{v_T} = \tanh(\frac{gt}{v_T}) \Rightarrow v(t) = v_T\tanh(\frac{gt}{v_T})$$

.

10) Fullstendig uelastisk støt mellom prosjektil (m,v) og pendel (M), dvs impulsbevaring:

$$p_f = mv = p_e = (m+M)V \to V = \frac{mv}{m+M}.$$

Pendelen har maks kinetisk energi i likevektsposisjonen, dvs umiddelbart etter støtet:

$$K_{max} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2}{(m+M)^2}v^2.$$

I pendelens maksutslag er K=0, dvs pendelen er i posisjon der

$$U = U_{max} = (m+M)gh = (m+M)gl(1-cos\theta) = K_{max} = \frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2}{(m+M)^2}v^2$$

$$\Rightarrow cos\theta = 1 - \frac{v^2}{2gl}\frac{m^2}{(m+M)^2}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(1 - \frac{v^2}{2gl}\frac{m^2}{(m+M)^2}\right) \simeq 0.14 \simeq 8^\circ$$

11) Bilen snur idet hastigheten skifter fortegn, dvs. ved $v(t) = 0$. Herav:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a_0 t^2 \exp(-t/\tau)\right) = (2a_0 t - a_0\frac{t^2}{\tau})\exp(-t/\tau) = a_0 t\exp(-t/\tau)(2 - t/\tau) = 0 \Rightarrow t = 2\tau$$

Setter $t = 2\tau$ inn i $x(t)$ og finner:

$$x(t = 2\tau) = a_0 4\tau^2\exp(-2) = (4.2 \cdot 4 \cdot 25 \cdot \exp(-2)) \text{ m} \simeq 56.84 \text{ m} \simeq 57 \text{ m}$$

12) Bilen har maksimal positiv hastighet tidspunktet der $a(t) = 0$, dvs.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(a_0[2t - t^2/\tau]\exp(-t/\tau)\Big) = a_0\Big[2 - 2t/\tau - 2t/\tau + t^2/\tau^2\Big]\exp(-t/\tau) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{t}{\tau} = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16-8} = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow t = (2 \pm \sqrt{2})\tau.$$

Løsningen som gjelder her er den med lavest t, dvs. $t = (2 - \sqrt{2})\tau \simeq 2.93$ s.

13)Stigen står i ro, så her gjelder N1 og N1-rot. Starter med rotasjonen. Vi kan velge rotasjonsaksen gjennom CM, men da får vi 3 dreiemomentbidrag å hanskes med, så det er enklere å bruke tipset fra oppgaveteksten og velge rot.akse gjennom A. N1-rot må være oppfyllt for ethvert valg av rotasjonsakse dersom stigen skal være i statisk balanse.

Velger positiv retning ut av figurplanet, som tilsvarer rotasjonsretning der stigen faller til bakken. N1-rot om A gir:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{G} + \vec{l} \times \vec{N}_v$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{lmg}{2}\sin(\pi/2 - \theta) - lN_v\sin(\theta) = l(\frac{mg}{2}\cos(\theta) - N_v\sin(\theta)) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{mg}{2N_v}$$

Vi kjenner ikke N_v, men denne kan bestemmes v.h.a. N1:

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{N}_g + \vec{N}_v + \vec{f} = 0,$$

hvor kun x-komponenten er av interesse:

$$F_x = 0 = N_v - f \Rightarrow N_v = f$$

Ved kritisk vinkel når $f_s = f_{max} = \mu_s N_g = \mu_s mg$ som altså ifølge N1 ovenfor må balanserers med N_v om stigen skal bli stående i ro. Setter inn for $N_v = f_s$ i ligninga vi fikk fra N1-rot:

$$\tan(\theta_{krit}) = \frac{mg}{2\mu_s mg} = \frac{1}{2\mu_s} \Rightarrow \theta_{krit} = \arctan(\frac{1}{2\mu_s}) \simeq 51.3^\circ.$$

14) Energibevaring ved ren rullebevegelse ($v = \omega R$), der m er i ro ved t=0 gir:

$$\Delta K = \Delta K_t + \Delta K_r = K_t + K_r = \frac{1}{2}(mv^2 + I_0\omega^2) = \frac{1}{2}(mv^2 + \frac{2}{5}MR^2v^2/R^2)$$

$$= \frac{(1+\frac{2}{5})}{2}mv^2 = -\Delta U = -mg\Delta y = -mg(y_{min} - y_0) = mg(y_0 - y_{min}).$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y_{min})}{1 + \frac{2}{5}}}.$$

For å finne y_{min} må vi strengt tatt finne ekstremalpunktene til $y(x)$ ved derivasjon, som gir minima for: $kx = \arctan(-\gamma/k) + n \cdot \pi = 0.02 + n \cdot \pi, n = 1, 3, 5, ...$ Det er imidlertid helt ok å innse at funksjonen y(x), som her beskriver banegeometrien, er på samme matematiske form som egenfunksjonen for et underkritisk dempet svingesystem. Siden dempingen er svak, $\gamma/k << 1$, vil minima ligge svært nær minima i cos-funksjonen, altså holder det å sette $kx = \pi \Rightarrow x = \pi/k$. Deretter finnes $y_{min} = y(x = \pi/k) = y_0 \exp(-\gamma\pi/k) \cdot \cos(\pi) = -y_0 \exp(\gamma\pi/k)$. Innsetting i uttrykket for v:

$$v = \sqrt{\frac{4gy_0 \exp(-\gamma\pi/k)}{1 + \frac{2}{5}}} = 1.256 \text{ m/s} \simeq 1.26 \text{ m/s}.$$

15) Brattest helningsvinkel der $kx \simeq \pi/2$. Vi finner:

$$\theta_{max} = \arctan\left(\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/(2k)}\right) = \arctan\left(|y_0 \exp(-\gamma x)[-\gamma \cos(kx) - k \sin(kx)]|_{x=\pi/2k}\right)$$

$$= \arctan\left(|y_0 \exp(-\gamma\pi/2k)[-\gamma \cos(\pi/2) - k \sin(\pi/2)]|\right) = \arctan\left(y_0 k \exp(-\gamma\pi/2k)\right)$$

$$\simeq \arctan(0.581) \simeq 0.527 \simeq 30^\circ$$

16) Kulas massesenterbevegelse i bunnpunktet er sentripetalakselerert med sentripetalakselerasjon $a_\perp = \frac{v^2(x=\pi/k)}{\rho - R}$, og i bunnpunktet peker denne langs positiv y. Fra N2 får vi:

$$\sum \vec{F} = (N - mg)\hat{y} = ma_\perp \hat{y} \Rightarrow N = m(a_\perp + g) = m\left(\frac{v^2(x = \pi/k)}{\rho - R} + g\right).$$

Vi kjenner $v(x = \pi/k)$ fra oppg. 14, så alle størrelser her er kjente, med unntak av ρ.
I bunnpunkter langs banen er $\frac{dy}{dx} = 0$, så $\rho = \frac{1}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$.

Finner først:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(y_0 \exp(-\gamma x)\left[-\gamma \cos(kx) - k \sin(kx)\right]\right)$$
$$= y_0 \exp(-\gamma x)\left[\gamma^2 \cos(kx) + \gamma k \sin(kx) + \gamma k \sin(kx) - k^2 \cos(kx)\right]$$
$$= y_0 \exp(-\gamma x)\left[(\gamma^2 - k^2)\cos(kx) + 2\gamma k \sin(kx)\right]$$

Setter inn for $x = \pi/k$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y_0 \exp(-\gamma\pi/k)\left[(\gamma^2 - k^2)\cos(\pi)\right] = y_0 \exp(-\gamma\pi/k)\left[k^2 - \gamma^2\right] \simeq 5.632 \text{ m}^{-1}$$

Dermed blir krumningsradien i første bunnpunkt $\rho = \frac{1}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \simeq \frac{1}{5.632}\text{m} \simeq 17.8$ cm, kulas baneradius $r = \rho - R = 16.8$ cm, og med hastighet fra oppg 15 finnes sentripetalakselerasjonen $a_\perp = v^2/r \simeq 9.42 \text{ m/s}^2$.

Dette gir $N = m(a_\perp + g) \simeq 0.58$N, som nesten er det dobbelte av kulas tyngde.

17) N2 for komponenten langs banen gir:

$$\sum F_{||} = mg\sin\theta - f = ma,$$

hvor θ er helningsvinkelen til banen. N2-rot (om CM) gir:

$$\vec{\tau} = \vec{R}x\vec{f},$$

hvor $\vec{R}$ peker fra CM mot banen, og $\vec{f}$ peker langs banen mot venstre, slik at $\vec{\tau}$ peker inn i skjerm/papirplanet, dvs. rulling mot høyre i figuren. For tallverdien får vi:

$$\tau = Rf = I_0\dot{\omega} = I_0 a/R = \frac{2Rma}{5} \Rightarrow f = \frac{2ma}{5}.$$

Vi setter inn for f i N2-uttrykket, og bruker småvinkelapprox (som tipset):

$$mg\sin(\theta) = mg\tan(\theta) = mg\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = mg|y_0\exp(-\gamma\cdot 0)(-\gamma\cos(0) - k\sin(0))| = mgy_0\gamma = \frac{7ma}{5}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5y_0\gamma}{7}g \simeq 0.009g \simeq 8.4\text{cm/s}^2$$

18) Dreieimpulsen er:

$$\vec{L} = m\vec{r}_{cm}\times\vec{v}_{cm} - I_0\omega\hat{z} = -(mRv + \frac{2}{5}mR^2v/R)\hat{z} = -\frac{7}{5}mRv\hat{z} \simeq -\hat{z}\cdot(3.9\text{ kg cm}^2/\text{s})$$

19)

$$\eta = \frac{I_A}{I_B} = \frac{\sum_{i=1}^5 m_i\rho_{A,i}^2}{\sum_{i=1}^5 m_i\rho_{B,i}^2} = \frac{m_C\cdot 0 + m_H\cdot 0 + 3m_H(r_{C-H}\sin(\pi-\alpha_0))^2}{m_C\cdot 0 + 4m_H(r_{C-H}\sin(\alpha_0/2))^2} = \frac{3r_{C-H}^2}{4r_{C-H}^2}\frac{[\sin(\pi)\cos(\alpha_0) - \cos(\pi)\sin(\alpha_0)]^2}{\sin^2(\alpha_0/2)}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\sin^2(\alpha_0)}{\sin^2(\alpha_0/2)} \simeq \frac{3}{4}\frac{0.89}{0.67} \simeq 1.00$$

20) For oscillatoren har vi:

$$E = k_bT = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 = 2\pi^2mf_0^2A^2 \Rightarrow \Delta r_{max} = A = \frac{1}{\pi f_0}\sqrt{\frac{k_bT}{2m}}$$

Dette gir:

$$\frac{\Delta r_{max}}{r_0} = \frac{1}{\pi f_0 r_0}\sqrt{\frac{k_bT}{2m_H}} \simeq 0.035.$$

21) Fra oppg 19 har vi

$$\eta = \frac{3}{4}\frac{\sin^2(\alpha_0)}{\sin^2(\alpha_0/2)},$$

altså er tallforholdet uavhengig av bindingslengden, r. Gauss feilforplantningslov gir dermed:

$$(\Delta\eta)^2 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial r_0}\Delta r\right)^2 = 0$$

22) Fra formelvedlegget:

$$\omega_0^2 = \frac{Mgd}{I_0 + Md^2} = \frac{gd}{\frac{1}{2}R^2 + d^2} \Rightarrow d^2 - \frac{g}{\omega_0^2} + \frac{R^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{g}{2\omega_0^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega_0^4 R^2}{g^2}}\right) = \frac{gT^2}{8\pi^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 2\left(\frac{4\pi^2 R}{gT^2}\right)^2}\right) \simeq 0.244$$

23) Fra formelsamling:

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M(\frac{1}{2}R^2 + d^2)}{Mgd}}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dd} = \frac{2\pi^2}{Tg^2d^2}\left(2dgd - (d^2 + \frac{R^2}{2})g\right) = \frac{2\pi^2}{Td^2g}\left(g(d^2 - R^2/2)\right) = 0.$$

Dvs $d = \pm R/\sqrt{2} \simeq \pm 57$ cm.

24) Startbetingelsene gir:

$$x(0) = A\cos(\phi) = x_0 \Rightarrow A = x_0/\cos(\phi)\ (1)\ \text{og}\cos(\phi) = x_0/A\ (2)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -A\omega_0\sin(\phi) \Rightarrow \sin(\phi) = -v_0/(A\omega_0)\ (3)$$

3:2 gir $\tan(\phi) = -v_0/(\omega_0 x_0) \Rightarrow \phi = \arctan(-v_0/(\omega_0 x_0)) \simeq 0.64$, og fra (1) får vi nå $A = 5.0$ cm.

25) Fra formelvedlegget finner vi $\omega_0 = 2\pi/T$ og $Q = \omega_0/2\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{QT}$. Dette gir:

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2(t) = \frac{1}{2}kA^2\exp(-2\gamma t) = E_0\exp(-2\frac{\pi}{QT}t) \Rightarrow E(t = (7*24*60*60)\text{s}) \simeq 0.05E_0.$$

26) $\omega = \sqrt{k/m}$, altså er frekvens og dermed svingetid uavhengig av amplitude/maksutslag, og bare avhengig av fjærkonstanten og massen, som er identiske i alle 4 systemer. Når de har samme periode og startes synkront, vil de også nå likevekt samtidig.

27) Dekomponerer $\vec{F}_g$ i en x-komponent langs tunnellen og en y-komponent normalt på denne, langs den stiplede linjen. Ser at F_y komponenten er konstant langs hele tunnellen, og motvirkes av normalkraft på m fra tunnellveggen, som vi (urealistisk) har antatt som friksjonsfritt underlag. Dvs. eneste netto kraft på m er F_x. Med θ som vinkelen mellom den stiplede loddlinja og $\vec{F}_g$ gir N2:

$$F_{netto} = F_x = -\frac{GM_J}{R^2} m \frac{r\sin\theta}{R} = -\frac{mg}{R} r\sin(\theta) = -\frac{mg}{R} x = -kx.$$

Dermed blir perioden

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \simeq 5063 \text{ s} \simeq 84.4 \text{ min}.$$

28)

$$F_g = GM_J m/r^2 = mv^2/r = m\omega^2 r \Rightarrow \omega^2 = GM_J/r^3 \Rightarrow T^2 = 4\pi^2/\omega^2 = \frac{4\pi^2}{GM_J} r^3 \text{ dvs. Keplers 3dje lov}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_J}} (r_{satelitt} + R)^{3/2} \simeq 5547 \text{ s} \simeq 92 \text{ min}.$$

29) Total mekanisk energi gitt ved $E = U + K = -\frac{GM_J m}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GM_J m}{r} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Vi fant uttrykk for ω^2 i løsning av forrige oppgave, og innsetting gir:

$$E = -\frac{GM_J m}{r} + \frac{1}{2}\frac{mGM_J r^2}{r^3} = -\frac{1}{2}\frac{GM_J m}{r} (= -\frac{1}{2}U) \simeq -2.94 \cdot 10^9 \text{ J} \simeq -2.9 \text{ GJ}$$

30) Fra hintet har vi $\int d\vec{g} = \vec{g} = -G\hat{r}\int \frac{dm}{r^2}$, hvor $dm = \lambda dl = axdx$, $r = x_0 - x$, og $\hat{r} = \hat{x}$, som gir:

$$\vec{g} = -Ga\hat{x}\int_0^L \frac{xdx}{(x_0 - x)^2}.$$

Sett: $u = x_0 - x \Rightarrow x = x_0 - u$ og $du = -dx$

$$\Rightarrow \vec{g} = Ga\hat{x}\int_{x_0}^{x_0 - L} \frac{x_0 - u}{u^2} du = Ga\hat{x}\int_{x_0}^{x_0 - L}\left(\frac{x_0}{u^2} - \frac{1}{u}\right) du = Ga\hat{x}[-x_0/u - \ln(u)]_{x_0}^{x_0 - L}$$

$$= Ga\hat{x}\left(-\frac{x_0}{x_0 - L} - \ln(x_0 - L) + 1 + \ln(x_0)\right) = Ga\hat{x}\left(\ln(\frac{x_0}{x_0 - L}) + \frac{x_0 - L - x_0}{x_0 - L}\right) = Ga\hat{x}\left(\ln(\frac{x_0}{x_0 - L}) - \frac{L}{x_0 - L}\right).$$

Vi har nok informasjon til plukke riktig svar, men beregner tilslutt a: $\int dm = M = \int_0^L axdx = aL^2/2 \Rightarrow a = 2M/L^2$, som gir:

$$\vec{g} = \frac{2GM}{L^2}\left(\ln(\frac{x_0}{x_0 - L}) - \frac{L}{x_0 - L}\right) \cdot \hat{x}.$$

31) Impulsbevaring gir

$$p_1 = \gamma_1 M v_1 = \gamma_0 m v \ (1),$$

og energibevaring gir:

$$E_1 = \gamma_1 M c^2 = \gamma_0 m c^2 + m c^2 = (\gamma_0 + 1) m c^2 \ (2).$$

(1):(2) gir:

$$\frac{\gamma_1 M v_1}{\gamma_1 M c^2} = \frac{v_1}{c^2} = \frac{\gamma_0 m v}{(\gamma_0 + 1) m c^2} = \frac{\gamma_0 v}{(\gamma_0 + 1) c^2} \Rightarrow v_1 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1} v.$$

Bestemmer $\gamma_0 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = (1 - 16/25)^{-1/2} = (9/25)^{-1/2} = 5/3$, og vi får:

$$v_1 = \frac{5/3 \cdot 8/10}{8/3} c = 5/10 c = c/2.$$

32) Fra impulsbevaringen hadde vi:

$$\gamma_1 M v_1 = \gamma_0 m v \Rightarrow M = \frac{\gamma_0 v}{\gamma_1 v_1} m = \frac{\frac{5}{3}\frac{4}{5} c}{(\frac{3}{4})^{-1/2} \cdot \frac{c}{2}} m = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} m = \frac{4}{\sqrt{3}} m \simeq 2.3m$$

33) Har: $K_1 = (\gamma_1 - 1) M c^2 = (2/\sqrt{3} - 1)(4/\sqrt{3}) m c^2 = \frac{8 - 4/\sqrt{3}}{3} m c^2 \simeq 0.36 m c^2$