Løsningsforslag, eksamen FY1001 18 desember 2020

1) $\rho = M/V = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(d/2)^3} = \frac{6M}{\pi d^3}$.

2) Usikkerhet:

$$(\Delta\rho)^2 = \left(\frac{\partial\rho}{\partial M}\Delta M\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\Delta d\right)^2 = \left(\frac{6}{\pi d^3}\Delta M\right)^2 + \left(-3\frac{6M}{\pi d^4}\Delta d\right)^2 = \left(\rho\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(-3\rho\frac{\Delta d}{d}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(3\frac{\Delta d}{d}\right)^2}$$

3) $F_x = ma_x = -bv_x^2 \Rightarrow |a_x/g| = \frac{bv_x^2}{mg}$

4) Maksimal friksjonskraft fra underlaget på kassa er $f_{max} = \mu_s N = \mu_s mg$. Trekkkraften er større enn maksimal statisk friksjon fra underlaget for alle versjoner av oppgaven, med unntak av versjon nr. 2 der det motsatte er tilfelle, slik at friksjonen forblir statisk og kassa blir stående i ro, dvs. $a = 0$. For de andre versjonene (v1, v3-v5) rår det kinetiske friksjonsbetingleser, og kassa akselereres. N2 gir $F_{net} = ma = F_{trekk} - f_k \Rightarrow a = (F_{trekk} - \mu_k mg)/m$.

5) Vi skal se bort fra alt annet tap enn luftmotstand, så den fulle motoreffekten går med til å motvinne luftmotstand. Vi får: $P = Fv = bv^2 v \Rightarrow v = \left(\frac{P}{b}\right)^{1/3}$.

6) Skriver $\omega(t)$ på en generisk form som $\omega(t) = a\omega_0 \sin(b\omega_0 t)$, hvor a og b er konstanter som har ulike verdier i de forskjellige variantene av oppgaven. Det samme gjelder for stopptiden som symboliseres ved t_1. På generisk form blir løsningen:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \phi = \int_0^{t_1} \omega(t)dt = a\omega_0 \int_0^{t_1} \sin(b\omega_0 t)dt = -a\omega_0 \frac{1}{b\omega_0}[\cos(b\omega_0 t)]_0^{t_1}$$

$$\Rightarrow \phi = -\frac{a}{b}(\cos(b\omega_0 t_1) - 1).$$

7) Maksimal hastighet:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_0}{\tau}e^{-t/\tau} - \frac{v_0 t}{\tau^2}e^{-t/tau} = \frac{v_0}{\tau}e^{-t/\tau}(1 - \frac{t}{\tau}) = 0$$

$$\Rightarrow t = \tau \Rightarrow v(t = \tau) = \frac{v_0\tau}{\tau}e^{-1} = v_0/e.$$

8) Akselerasjon:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau}(1 - \frac{t}{\tau}).$$

Ser at denne funskjonen er monotont avtagende i t, og at maksimal akselerasjon inntreffer ved t=0, altså:

$$\max(a) = a(t = 0) = v_0/\tau.$$

9) Tilbakelagt strekning:

$$s(t \to \infty) = \int_0^\infty v(t)dt = \int_0^\infty \frac{v_0 t}{\tau} e^{-t/\tau} dt.$$

Substituerer $u = \frac{t}{\tau} \Rightarrow dt = \tau du$, som gir:

$$s(t \to \infty) = v_0 \tau \int_0^\infty u e^{-u} du = \frac{1!}{(-1)^2} v_0 \tau = v_0 \tau.$$

10) Stasjonær vinkel $\Rightarrow$ ren sentripetalakselerert bevegelse i horisontalplanet. Dermed må N1 gjelde i vertikalplanet:

$$\sum F_y = -mg + S\cos(\theta) = 0 \Rightarrow S = mg/\cos(\theta) \text{ (1)},$$

hvor S symboliserer snordraget. N2 i horisontalplanet:

$$\sum F_x = S\sin(\theta) = mv^2/r = m\omega^2 r = 4\pi^2 mr/T^2$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{Ssin\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\tan\theta}},$$

hvor (1) er brukt til å erstatte S. Med karusellradius $r = d/2 + L\sin(\theta)$, fås:

$$T = \sqrt{\frac{d/2 + L\sin(\theta)}{g\tan(\theta)}}.$$

11) Har $M = \int_V \rho(r)dV$, $\rho(r) = \rho_0(a - \alpha r/R)$, hvor a, α og $\rho_0 = M/V = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ er konstanter, og $dV = 4\pi r^2 dr$. Dette gir:

$$M = 4\pi\frac{M}{V}\int_0^R (ar^2 - \alpha r^3/R)dr$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi\left[\frac{a}{3}r^3 - \alpha\frac{r^4}{4R}\right]_0^R$$

$$\Rightarrow \frac{R^3}{3} = R^3\frac{(4a - 3\alpha)}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3}(a - 1).$$

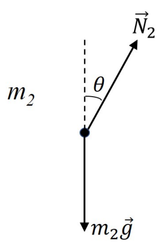
12) Kreftene på den nederste klossen er:
<u>Vertikalt</u>: tyngde $-m_2 g$, normalkraft fra underlaget $(m_1+m_2)g$, og normalkraft fra toppklossen $-m_1 g$.
<u>Horisontalt</u>: trekkraft T, friksjon fra toppklossen $-\mu_1 m_1 g$, og friksjon fra underlaget $-\mu_2(m_1+m_2)g$.

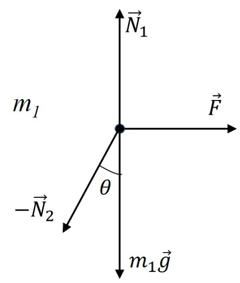
Vertikalt blir summen av krefter er 0 (som er rimelig da evt bevegelse er i horisontalplanet).

Horisontal fås:

$$m_2 a_x = T - (\mu_1+\mu_2)m_1 g - \mu_2 m_2 g \Rightarrow a_x = \frac{T-(\mu_1+\mu_2)m_1 g}{m_2} - \mu_2 g.$$

13) Kreftene på hvert av legemene angitt i fritt-legeme diagram:





Dersom klossen skal ligge i ro på skråplanet må begge legemer ha samme a_x (og a_y).

<u>m_1 horisontalplan (N2)</u>:

$$F - N_2 \sin\theta = m_1 a_x \ (1).$$

<u>m_2 vertikalt (N1)</u>:

$$N_2\cos\theta - m_2 g = m_2 a_y = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{m_2 g}{\cos\theta} \ (2).$$

Setter (2) i (1):

$$F - m_2 g\tan\theta = m_1 a_x \ (3).$$

<u>m_2 horisontalt (N2)</u>:

$$N_2\sin\theta = m_2 g\tan\theta = m_2 a_x \Rightarrow a_x = g\tan\theta \ (4).$$

Setter inn (4) i (3):

$$F - m_2 g\tan\theta = m_1 g\tan\theta \Rightarrow F = (m_1+m_2)g\tan\theta.$$

14) Har $m\vec{g}|| - \vec{\omega}$, så $\tau_{net} = 0$, slik at dreieimpulsen er bevart:

$$L_f = I_f\omega_f = I_i\omega = L_i \Rightarrow \omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega = \left(\frac{0.1ML^2 + 2ml^2/4}{0.1ML^2+2mL^2/4}\right)\omega = \left(\frac{M+5m\frac{l^2}{L^2}}{M+5m}\right)\omega.$$

15) N1-rot om berøringspunktet, slik at friksjonen ikke gir noe bidrag til rotasjonslikevekt (N1-rot må gjelde om alle mulige valg av rotasjonsakser, inklusive denne). Med a som platas sidekant fås

$$\vec{a} \times \vec{S} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a} \times m\vec{g} = aS - \frac{amg}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S = mg/\sqrt{2}.$$

16) Bruker N2-rot på systemet. Finner først systemets dreieimpuls:

$$L = 1/2 m_t r^2 \omega + r m_2 v + r m_1 v = (1/2 m_t + m_2 + m_1) r v.$$

Ytre dreiemoment på systemet (med $\vec{r_2}$ og $\vec{r_1}$ som posisjonen til massesenterene av de to kulene relativt rotasjonsaksen i A):

$$\tau = \vec{r_2} \times m_2 \vec{g} + \vec{r_1} \times m_1 \vec{g} = (m_2 - m_1) r g = \frac{dL}{dt} = (1/2 m_t + m_2 + m_1) r \frac{dv}{dt} = (1/2 m_t + m_2 + m_1) r a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{1/2 m_t + m_2 + m_1} g.$$

17) Deler opp kvadratet i 4 identiske stenger(t(opp) b(unn), h(øyre) og v(enstre)), hver med masse m. Beregner bidraget fra hver enkeltstang og summerer tilslutt $I_{tot} = I_t + I_b + I_h + I_v$. For hvert enkeltbidrag brukes treghetsmoment $I_0 = md^2/12$ for rotasjon om massesenteret, og Steiners sats for evt. forflytninger av rotasjonssenteret. For rotasjon om endepunkt av ei stang fås $I_e = I_0 + md^2/4 = md^2/3$.

Versjon 1 (A i CM på b):
$I_h = I_v = I_e + md^2/4$, $I_t = I_0 + md^2$, $I_b = I_0$. Dermed $I_{tot} = 7/3 md^2$

Versjon 2 (A i nedre venstre hjørne):
$I_b = I_v = I_e$, $I_t = I_h = I_e + md^2$. Dermed: $I_{tot} = 10/3 md^2$

Versjon 3 (A gjennom midten av h og v, i kvadratets plan):
$I_h = I_v = I_0$, $I_t = I_b = md^2/4$. Dermed $I_{tot} = 2/3 md^2$

Versjon 4 (A langs høyre stang):
$I_h = 0$, $I_v = md^2$, $I_t = I_b = I_e$. Dermed $I_{tot} = 5/3 md^2$

Versjon 5 (A gjennom CM):
$I_t = I_b = I_h = I_v = I_0 + md^2/4$. Dermed $I_{tot} = 4/3 md^2$

18) N2-rot gir:

$$\tau = \vec{r} \times \vec{f_k} = d\mu_k mg/2 = I_0\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{d\mu_k mg}{2I_0}.$$

Dermed

$$\omega(t) = \alpha t \Rightarrow t = \frac{2\omega I_0}{d\mu_k mg}.$$

19) Det er bare tyngdekraften som kan gi opphav til et dreiemoment i A. Dermed:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{d} \times m\vec{g}| = dmg\sin(\pi/2 - \theta) = dmg\cos(\theta).$$

20) Bruker N2-rot og N2 på den kompakte kula. N2 langs kulebanen:

$$mg\sin\theta - f = ma_{||} \ (1).$$

N2-rot om CM:

$$\tau = fR = I_0\alpha = I_0 a_{||}/R \Rightarrow a_{||} = fR^2/I_0.$$

Erstatter $a_{||}$ i (1), og lar $f = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$, i samsvar med maksimal friksjon. Herav:

$$mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta(\frac{mR^2}{2/5mR^2} + 1) \Rightarrow \mu_s = 2/7\tan\theta.$$

21) Massesenterbevegelse for kula gir en sirkelbane med radius $R-r$. Dermed må summen av radielt rettede krefter gi sentripetalakselerert bevegelse langs kuleskallbanen:

$$N - mg = m\frac{v^2}{R-r} \Rightarrow N = m(\frac{v^2}{R-r} + g).$$

22) Elastisk støt mellom ball og vegg gir $\Delta p = m\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$. Integralet kan løses (relativt enkelt) ved å finne formen på $F(t)$, men det enkleste er å innse at arealet som tilsvarer integralet er gitt ved $F_0\Delta t/2$. Herav: $F_0 = 2m\Delta v/\Delta t$.

23) For alle varianter av oppgaven er $-kx_0 < \mu_s mg$, så det er rene rullebevegelser. Dermed er den mekaniske energien i systemene bevart. Videre vil akselerasjonen fra fjæra være positiv inntil denne når likevektsposisjonen, der den skifter fortegn, slik at det rullende legemet mister kontakten med fjærplata.

Dermed:

$$\Delta K = K_{trans} + K_{rot} = 1/2MV^2(1+C) = -\Delta U = 1/2kx_0^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{kx_0^2}{M(1+C)}}.$$

24) Total energi gitt ved $E_{tot} = K_{max} = U_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$.

25) Enkel harmonisk oscillator, dvs. mekanisk energi er bevart. Med oppgitt maksutslag x_{max} fås $E = U_{max} = 1/2kx_{max}^2$. Fra startbetingelsen har vi gitt utslaget x_0, samt at $v > 0$.

Uttrykker $x_{max} = ax_0$, med $a > 1$ som en konstant som varierer mellom de ulike versjonene av oppgaven. Fra energibevaring finnes tallverdien av starthastigheten:

$$E = 1/2kx_{max}^2 = 1/2ka^2x_0^2 = U(0) + K(0) = 1/2kx_0^2 + 1/2mv_0^2$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{k}{m}x_0^2(a^2-1) \Rightarrow v_0 = \pm\omega_0 x_0\sqrt{a^2-1},$$

hvor løsningen med positivt fortegn tilfredstiller startbetingelsene.

Med bruk av standardløsning og startbetingelser: $v_0 = -\omega_0 A\sin(\phi) = \omega_0 x_0\sqrt{a^2-1}$ og $x_0 = A\cos(\phi)$, som kombinert gir $A = x_{max}$ og $\phi = \arcsin(-\frac{\sqrt{a^2-1}}{a})$. Utslaget for oscillatoren er $x_0 = x_{max}\cos(\omega_0 t + \phi)$, slik at hastigheten blir $v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$, som gir $v(t = t_1)$.

26) Fysisk og matematisk pendel med samme periode, altså samme egenfrekvens, gir $g/L = mg(xd)/I \Rightarrow L = \frac{I}{m(xd)}$, med xd som avstanden fra legemets massesenter til rotasjonsaksen for den fysiskte pendelen. For hver enkelt fysisk pendel finnes treghetsmomentet vba tabulerte treghetsmomenter gitt i formelsamlinga + Steiners sats. Med $I_0 = cmd^2$ som treghetsmoment for rotatsjonsakse gjennom massesenteret, fås en en generisk løsning på formen $I = (c + x^2)md^2 \Rightarrow L = \frac{c+x^2}{x}d$.
For de ulike formene finnes:

v1 - CM midt i skiva, $I = 1/2m(d/2)^2 + m(d/4)^2 \Rightarrow c = 1/8, x = 1/4$;
v2 - CM midten på stanga, $I = 1/12md^2 + m(d/4)^2 \Rightarrow c = 1/12, x = 1/4$;
v3 - CM i kulesentrum, $I_0 = 2/5m(d/2)^2 + m(d/3)^2 \Rightarrow c = 1/10, x = 1/3$;
v4 - CM midt i kvadratet, $I = 4(1/3md^2) + 2md^2 \Rightarrow c + x^2 = 10/3, x = \sqrt{2}/2$;
v5 - CM i skjæringen av normalene inn fra midten av hver sidekant, $I = 2(md^2/3) + md^2/12 + m(d\cos(\pi/6))^2 \Rightarrow c + x^2 = 3/2, x = 1/\sqrt{3}$.

For de to siste versjonene trenger man ikke bestemme treghetsmoment om CM.

27) Systemets egenfrekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, og dempingsfaktor $\gamma = b/2m$ er slik at systemet har $\gamma \gg \omega_0$ og er overkritisk (sterkt) dempet. Standardløsning:

$$x(t) = A\exp(-\alpha_1 t) + B\exp(-\alpha_2 t),$$

hvor: $\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma + \gamma\sqrt{1 - \omega^2/\gamma^2} \simeq 2\gamma$, og $\alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma - \gamma\sqrt{1 - \omega^2/\gamma^2} \simeq \gamma - \gamma(1 - 1/2\omega^2/\gamma^2) = \omega_0^2/2\gamma = k/b$. Siden $\alpha_1 \gg \alpha_2$, vil det første leddet i standardløsningen gi sterk demping umiddelbart, idet bevegelsen starter, mens det andre leddet vil dominere i det senere forløpet av dempingen. Siden vi betrakter en sluttilstand idet vi nærmer oss likvektsposisjonen til fjæra, holder det med å betrakte det andre leddet. Vi får:

$$x(t) \simeq x_0 \exp(-kt/b) \Rightarrow t = (b/k) \ln(x_0/x(t)).$$

28) Nå er dempingsfaktoren redusert slik at $\gamma \ll \omega_0$, dvs. systemet er underkritisk dempet, og dermed et svingesystem. Standardløsning:

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega t),$$

med $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Oscillatorens mekaniske energi tillsvarer dens maksimale potensielle energi, som avtar med dempningen

$$E(t) = U_{max}(t) = \frac{1}{2} k x_0^2 \exp(-2\gamma t).$$

Den mekaniske energien er redusert med $(1-x)100\%$ av den opprinnelige når $\exp(-2\gamma t) = x$, d.v.s.

$$t = -(m/b) \ln x.$$

29) Resonans, så $\omega_d = \omega_0$. Dermed:

$$E = \frac{1}{2} k A^2(\omega_0) = \frac{k}{2} \frac{(F_0/m)^2}{(2\gamma\omega_0)^2} = \frac{m F_0^2}{2b^2}.$$

30)

$$Q = \omega_0/\Delta\omega = \omega_0/2\gamma = \frac{\sqrt{k/m}}{b/m}.$$

31) Finner først netto fjærkraft på svingemassen. N2 gir:

$$kx + kx = ma = k_{eff} x \Rightarrow k_{eff} = 2k.$$

Enkel harmonisk oscillator $\Rightarrow$ energibevaring:

$$E = U_{max} = \frac{1}{2} k_{eff} A^2 = U(t) + K(t) = \frac{1}{2} 2kx^2 + \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = kx^2 + \frac{(1+c)}{2} m V^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2k}{m(1+c)}} (A^2 - x^2)^{1/2}.$$

Akselerasjonen blir:

$$a = \frac{dV}{dt} = \sqrt{\frac{2k}{m(1+c)}} \frac{1}{2(A^2 - x^2)^{1/2}} \cdot (-2x) \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{m(1+c)}} \frac{1}{(A^2 - x^2)^{1/2}} \sqrt{\frac{2k}{m(1+c)}} (A^2 - x^2)^{1/2} x$$

$$= -\frac{2k}{m(1+c)} x = -\omega_0^2 x.$$

som tilfredstiller differensialligningen for en enkel harmonisk oscillator med egenfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m(1+c)}}$. Svingetiden blir

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m(1+c)}{2k}}.$$

32)K3:

$$T_x^2 / R_x^3 = T_y^2 / R_y^3 \Rightarrow$$

$$\text{V1 og V5: } R_y = R_x \left(\frac{T_y}{T_x} \right)^{2/3}.$$

$$\text{V2: } T_y = T_x \left(\frac{R_y}{R_x} \right)^{3/2}.$$

$$\text{V3: } R_x = R_y \left(\frac{T_x}{T_y} \right)^{2/3}.$$

$$\text{V4: } T_x = T_y \left(\frac{R_x}{R_y} \right)^{3/2}.$$

33)Planetradius R, satelitthøyde over planetoverflaten h, og planetmasse M.
Finner først banehastighet for satelitten:

$$\text{N2: } GMm/(R+h)^2 = ma = mv_b^2/(R+h) \Rightarrow v_b = \sqrt{GM/(R+h)}.$$

Lar Δv være reduksjon i banehastigheten. Det er ingen atmosfære, så satelitten vil fortsette med redusert og konstant banehastighet $v_0 = v_b - \Delta v$. Reduksjon i banehastighet vil føre til at akselerasjonen fra planetens tyngdekraft på satelitten ikke lengre balanseres ut som sentripetalakselerasjon, og restkomponenten gir opphav til en akselerasjon rettet radielt innover, slik at satelitten begynner et fall inn mot planeten.

Kun tyngdekraft virker på satelitten, så systemet er konservativt. Energibevaring gir:

$$\Delta K + \Delta U = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) - \frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{(R+h)} = 0 \Rightarrow v^2 = 2GM(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}) + v_0^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)} + v_0^2}.$$

34) Partiklen flyttes fra sentrum $r = 0$ til en posisjon aR_j, hvor a er en konstant som varieres i de ulike versjonene av oppgaven.

$$W = -\Delta U = -m\Delta V = -m(V(r = aR_j) - V(r = 0)) = m(V(r = 0) - V(r = aR_j))$$

$$= -m\frac{3GM}{2R_j}(1 - 1 - \frac{a^2 R_j^2}{3R_j^2}) = m\frac{GM}{R_j^2}\frac{3R_j}{2}\frac{a^2}{3} = mgR_j\frac{a^2}{2}.$$

Har brukt uttrykk for gravitasjonspotensial inne i en kompakt kule med homogen massefordeling: $V(r \leq R_j) = -\frac{3GM}{2R_j}(1 - \frac{r^2}{3R_j^2})$ - se forelesningsnotater.

35) Unnslippningshastigheten gitt ved $E = U_0 + K_0 \geq 0 \Rightarrow v_e^2 = \frac{2}{m}\frac{gm}{2R_j}3R_j^2 \Rightarrow v_e = \sqrt{3gR_j}$.

36) Lar referansesystem $\bar{S}$ bevege seg med hastighet $v = v_b$ relativt S som er i ro. Partiklens hastighet i $\bar{S}$ blir dermed $\bar{u_x} = v_b$. Hastighet observert i A:

$$u_x = (\bar{u}_x + v)/(1 + \bar{u}_x v/c^2) = 2 \cdot v_b/(1 + v_b^2/c^2).$$

37) Energi og impulsbevaring. Fra impulsbavaring fås:

$$p_f = 0 = -\gamma_1 m_1 v_1 + \gamma_2 m_2 v_2 \Rightarrow m_2 = m_1\frac{\gamma_1 v_1}{\gamma_2 v_2} = \alpha m_1 \ (1).$$

Energibevaring gir:

$$E_f = Mc^2 = \gamma_1 m_1 c^2 + \gamma_2 m_2 c^2 = K + (m_1 + m_2)c^2 = E_e \Rightarrow K = (\gamma_1 - 1)m_1 c^2 + (\gamma_2 - 1)m_2 c^2 \ (2)$$

og samtidig

$$(\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2)c^2 = Mc^2 \ (3).$$

Erstatter m_2 i (2) med (1):

$$K = m_1 c^2(\gamma_1 - 1 + \alpha(\gamma_2 - 1)) \ (5),$$

og (1) i (3) gir:

$$m_1 c^2(\gamma_1 + \gamma_2\alpha) = Mc^2 \Rightarrow m_1 c^2 = \frac{Mc^2}{\gamma_1 + \alpha\gamma_2} \ (6).$$

Kombinerer (5) og (6):

$$K = \frac{\gamma_1 - 1 + \alpha(\gamma_2 - 1)}{\gamma_1 + \alpha\gamma_2}Mc^2.$$

γ_1, γ_2 og $\alpha = \gamma_1 v_1/\gamma_2 v_2$ er gitt ved innsetting av tallverdier fra oppgaveteksten.

38)

$$E = \gamma mc^2 \Rightarrow (1 - v^2/c^2)E^2 = m^2c^4 \Rightarrow v^2 = c^2(E^2 - m^2c^4)/E^2 \Rightarrow v = c\sqrt{1 - m^2c^4/E^2}$$

39) N2 på relativistisk form:

$$F_{rel} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dv}(\gamma mv)a = ma\left(\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}} - \frac{\frac{v}{2}\left(\frac{-2v}{c^2}\right)}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\right)$$

$$= ma\frac{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = \frac{ma}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = kF_{rest} = kma.$$

Dermed:

$$k = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \Rightarrow v = c\sqrt{1 - (\frac{1}{k})^{2/3}}.$$

40)

$$E = K + mc^2 = (a+1)mc^2$$

og

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \Rightarrow (pc)^2 = E^2 - (mc^2)^2 = ((a+1)^2 - 1)(mc^2)^2 = a(a+2)(mc^2)^2$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{a(a+2)}mc.$$