Løsningsforslag, eksamen FY1001 19 Januar 2022

1)Likevekt i grenseverdien for friksjon langs skråplanet (N1):

$$\vec{F}_{net} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_s = (mg\sin\theta - f_s)\cdot\hat{x} + (N - mg\cos\theta)\cdot\hat{y}.$$

$$y:\ \ N = mg\cos\theta\ ; \qquad x:\ \ f_s = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \theta_{max} = \arctan\mu_s.$$

2) Utgangshastigheten tilsvarer terminalhastighet, og er parallel med $\vec{g}$, så vi har 1D bevegelse og likevekt (N1):

$$m\vec{a} = 0 = (f_{lm} - mg)\hat{y} \Rightarrow f_{lm} = mg,$$

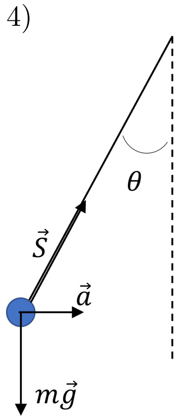
hvor $\hat{y}$ er valgt positiv i retn. opp fra bakken. Arbeidet fra luftmotstanden blir dermed:

$$W = \int_h^0 \vec{f}_{lm}\cdot\hat{y}dy = mg\int_h^0 dy = mg(0-h) = -mgh.$$

3) Treghetsmomentet gitt ved

$$I = \sum_{i=1}^{6} m_i r_i^2 = 6mR^2.$$

4)



N2:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} = ma_x\hat{x} = \vec{S} + m\vec{g}.$$

y: (N1)

$$S\cos\theta = mg \Rightarrow S = \frac{mg}{\cos\theta}.$$

x: (N2)

$$ma_x = S\sin\theta = mg\tan\theta.$$

Vi har konstant akselerasjon $a_x = g \tan\theta$ som gir takeoffhastighet ved tid t:

$$v(t) = v_0 + a_x t = gt \tan\theta.$$

5) Løper sentripetalakselerert gjennom svingen (N2):

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{G} = m\frac{v^2}{R}\hat{r},$$

med $\hat{r}$ rettet radielt innover i svingen. Dekomponerer i sylinderkoordinater $||\hat{r}$ og $||\hat{z} = (\hat{r} \times \hat{\phi})$, hvor ϕ er vinkelposisjonen langs svingbanen:

$||\hat{z}$:

$$N\sin\theta - mg = 0 => N_z = N\sin\theta = mg.$$

$||\hat{r}$:

$$ma_r = m\frac{v^2}{R} = N\cos\theta = N_r.$$

Kraft fra is på løper blir dermed:

$$|\vec{F}| = N = \sqrt{N_z^2 + N_r^2} = m\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

6) Betrakter de to massene og tauet som et system slik at snordragene er interne krefer, og ser først på hele systemet. Velger x som koordinat langs underlaget (N2):

$$T = (m_1 + m_2 + m_t)a_x => a_x = \frac{T}{m_1 + m_2 + m_t}.$$

Likevekt langs snora i ethvert punkt gir $S_{1x} = (m_t + m_2)a_x$ og $S_{2x} = m_2 a_x$, så horisontalkomponentene til snordraget blir ulike ved de to innfestningspunktene. I tillegg vil tyngden av tauet gi en vertikalkomponent til snordraget i innfestingspunktene, og siden tauet har jevn massefordeling, vil vertikalkomponentene være balanserte, dvs. $S_{1y} = S_{2y} = m_t g/2$. Dermed:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{(m_t + m_2)^2 a_x^2 + m_t^2 g^2/4}}{\sqrt{m_2^2 a_x + m_t^2 g^2/4}}.$$

7) Finner først akselerasjonen langs skråplanet. Legger x i denne retningen, og får:
y (N1):

$$N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

x (N2):

$$ma_x = mg\sin\theta - f_k = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta \Rightarrow a_x = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

Akselerasjonen er konstant, så med $x(t)$ som tilbakelagt distanse langs skråplanet får vi

$$\sin\theta = h/x(t) \Rightarrow x(t) = h/\sin\theta = a_x t^2/2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a_x \sin\theta}}$$

$$\Rightarrow v_x(t) = a_x t = \sqrt{\frac{2ha_x}{\sin\theta}} = \sqrt{2hg(1-\mu_k \cot\theta)}$$

8) N2 på bil og slepemasse med F_T som ekstern kraft fra underlaget som akselerer systemet:

$$m\vec{a} = ma_x\hat{x} = \vec{F}_T + \vec{f} + \vec{N}_b + m_b\vec{g} + \vec{N}_s + m_s\vec{g} = (F_T - f)\hat{x} \Rightarrow a_x = \frac{F_T - \mu m_s g}{m_b + m_s}.$$

Ser så på slepemassen alene, og finner slepekraften fra bilen, F_s:

$$m_s a_x = F_s - f \Rightarrow F_s = m_s\frac{F_T - \mu g m_s}{m_b + m_s} + \mu g m_s = \frac{F_T + \mu m_b g}{1 + \frac{m_b}{m_s}}$$

9) For en stasjonær klode får vi $g_{stat} = \frac{M_J G}{R_J^2}$, slik at vi ved å ta hensyn til rotasjonen får $g_{dyn} = g_{stat} - v^2/R_J^2 = g_{stat} - \omega^2 R_J = g_{stat} - 4\pi^2 R_J/T^2$. Dermed finnes

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{g_{dyn} - g_{stat}}{g_{stat}} = \frac{-4\pi^2 R_J/T^2}{MG/R_J^2} = -\frac{4\pi^2 R_J^2}{MGT^2}.$$

10) Kan bruke K3 som gir $a^3 = \frac{(M_s+m_k)GT^2}{T^2} \simeq \frac{M_s GT^2}{T^2}$, hvor a utgjør den store halvaksen i den elliptiske kometbanen, der vi har antatt at kometmassen er liten nok til at vi kan neglisjere den, samt at sola ligger i et av ellipsens brennpunkter. Maksimal og minimalavstanden til sola vil utgjøre de to punktene av ellipsebanen som skjærer hovedaksen, så

$$r_{min} + r_{max} = 2a \Rightarrow r_{max} = 2a - r_{min} = 2\left(\frac{M_s GT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - r_{min}.$$

11) Vi får opplyst at det er vindstille, slik at luftmotstand kun avhenger av syklistens hastighet. Ned bakken med konstant hastighet, som gir en samlet motstand (luft, rullefriksjon, mm) f_{tot} gitt ved $\sum F = mg\sin\theta - f_{tot} = 0 \Rightarrow f_{tot} = mg\sin\theta$. Dersom syklisten sykler opp bakken med den samme hastigheten under de samme forholdene (luftmotstand, rullefriksjon, mm), får vi:

$$F_{syklist} - mg\sin\theta - f_{tot} = F_{syklist} - 2mg\sin\theta = 0 \Rightarrow F_{syklist} = 2mg\sin\theta.$$

Både kraft og hastighet er konstant, så effektbruken opp bakken blir også konstant og

$$P = F_{syklist}v = 2mgv\sin\theta.$$

12) Energibevaring:

$$E_{tot} = U_i = mgL = K_f + U_f = 1/2mv_f^2 + 2mg(L-h) \Rightarrow v^2 = 2gL - 4gL + 4gh \Rightarrow v = \sqrt{2g(2h-L)}.$$

13) Ser at den uthulede skiva er symmetrisk om linja $y = 0$, så $Y_{CM} = 0$. Lar X_{CM} være x-koordinatet til massesenter i den uthulede skiva, og tilsvarende $x_{CM} = l$ være massesenterkoordinat til den lille skiva (som er fjernet). Dersom vi fyller igjen hullet ved å legge til den lille skiva, skal

$$\frac{MX_{CM} + ml}{M+m} = \frac{MX_{CM} + ml}{M_{tot}} = 0 \ (1),$$

siden massesenteret for den fullstendige skiva ville ligget i origo. Massen vi har fjernet er

$$m = \pi R^2 \sigma = \frac{1}{4}(\pi 2R^2)\sigma = \frac{1}{4}(M+m) = M_{tot}/4,$$

slik at $M = M_{tot} - M_{tot}/4 = 3M_{tot}/4$. Fra lign. (1) finner vi

$$\frac{M_{tot}(3/4X_{CM} + l/4)}{M_{tot}} = 0 \Rightarrow X_{CM} = -l/3.$$

14) Maksimal fjærkompresjon om støtet betraktes som fullstendig uelastisk, der potensiell energi lagret i fjæra tilsvarer tapt kinetisk energi i kollisjonen.
Impulsbevaring:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Energibevaring via fjæra:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow kx^2 = m_1 v_1^2 - (m_1 - m_2)\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1+m_2)^2} = m_1 v_1^2 (1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2})$$

$$\Rightarrow x = v_1 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

15)Etter at fjæra har nådd maksimal kompresjon, strekkes den ut igjen, slik at lagret potensiell energi i fjæra tilbakeføres til kinetisk energi for massene. Vi har dermed et elastisk støt med:

Impulsbevaring:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow m_2 v_2' = m_1(v_1 - v_1') \ (1).$$

Energibevaring:

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \Rightarrow m_2 v_2'^2 = m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') \ (2).$$

Deler (2):(1) som gir

$$v_2' = v_1 + v_1' \ (3),$$

og bruker dette resultatet for v_2' i (1):

$$m_2(v_1 + v_1') = m_1(v_1 - v_1') \Rightarrow v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1.$$

Innsatt for v_1' i (3) fås tilslutt:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

16) Dersom månen vender samme side mot planeten under hele banerotasjonen, må spinn og banedreieimpuls ha samme periodisitet og dermed samme vinkelfrekvens, dvs.

$$\omega_s = \omega_b \Rightarrow \frac{L_s}{L_b} = \frac{I_s}{I_b} = \frac{\frac{2}{5} M_m r_m^2}{M_m r_b^2} = \frac{2r_m^2}{5r_b^2}.$$

17) Ser på rakett og eksos som et system med gravitasjon som ekstern kraft, og ser bort fra gravitasjonseffekt på raketteksosen. Dersom det ønskes en akselerasjon $a = cg$ ved takeoff fra bakken faar vi (N2):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt} \Rightarrow mcg + mg = v_{rel} \frac{dm}{dt} \Rightarrow v_{rel} = \frac{(c+1)mg}{\frac{dm}{dt}}.$$

18) Energibevaring:

$$E_{tot} = U_i = mgL/2 = K_f = 1/2 I_e \omega^2 = \frac{1}{6} ml^2 \omega^2 = \frac{1}{6} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{3gl}.$$

19) Ser på de to massene og trinsa som et system. Dreieimpulsen for systemet blir

$$L = (m_1 + m_2) v R_0 + Iv/R_0 = v(m_1 + m_2 + m_t/2) R_0,$$

og dreiemomentet på systemet fra ytre krefter (gravitasjon + friksjon) blir

$$\tau = m_1 g R_0 - f_k R_0 = m_1 g R_0 - \mu_k m_2 g R_0 = \frac{dL}{dt} = (m_1 + m_2 + m_t/2) R_0 \frac{dv}{dt} = (m_1 + m_2 + m_t/2) R_0 a$$

$$\Rightarrow a = g \frac{m_1 - \mu_k m_2}{m_1 + m_2 + m_t/2}.$$

20) Fullstendig uelastisk (rotasjons)støt, dvs. dreieimpulsbevaring

$$L_i = I_J \omega_i - m_k v_k R_J \sin\theta = (I_J + m_k R_J^2) \omega_f = L_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_J \omega_i - m_k v_k R_J \sin\theta}{I_J + m_k R_J^2}.$$

Endringen i ω forårsaker endring i jorddøgnet,

$$\Delta T_J = 2\pi\left(\frac{1}{\omega_f} - \frac{1}{\omega_i}\right) = 2\pi\left(\frac{\omega_i - \omega_f}{\omega_i\omega_f}\right) = T_J\left(\frac{\omega_i}{\omega_f} - 1\right) = T_J\left(\frac{\omega_i(I_J + m_k R_J^2)}{I_J\omega_i - m_k v_k R_J \sin\theta} - 1\right).$$

21) Skyvekrafta må være lik friksjonen eller større for at lampa skal kunne bevege seg, så minimal skyvekraft blir $F_s = \mu mg$. For at lampa ikke skal velte må vi ha likevekt mhp dreiemoment rundt enden av lampefoten. Vi får (N1- rot)

$$\tau = hF_s - dmg/2 = 0 \Rightarrow h\mu mg - (d/2)mg = 0 \Rightarrow h = \frac{d}{2\mu}.$$

22) Ytre dreiemoment på systemet

$$\tau = mgR = I_s\alpha_s = (2MR^2/5 + mR^2)\alpha_s \Rightarrow a_s = \alpha_s R = \frac{mgR^2}{\frac{2}{5}MR^2 + mR^2} = g\frac{1}{1 + \frac{2M}{5m}}.$$

23) Snordraget på m (N2)

$$ma_s = mg - S \Rightarrow S = m(g - a_s) = mg\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2M}{5m}}\right).$$

24) Velger nullnivå for potensiell energi i utgangsposisjonen (pos 1). Energibevaring og ren rulling gir

$$U_1 + K_1 = 0 = K_2 + U_2 = mv_2^2/2 + I\omega^2/2 - mg(R_0 - r) \Rightarrow 1/2mv_2^2 + 1/5mv_2^2 = (7/10)mv_2^2 = mg(R_0 - r)$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{10g(R_0 - r)}{7}}.$$

25) Høyden i posisjon 3 er $h_3 = -(R_0 - r)\cos(\theta - \pi/2) = -(R_0 - r)\sin\theta$, så

$$v_3 = \sqrt{\frac{-10U_3}{7m}} = \sqrt{\frac{10g(R_0 - r)\sin\theta}{7}}.$$

26) Velger kartesisk origo i CM pos nr. 2. For CM pos. nr. 3 får vi $x_3 = (R_0 - r)\cos(\pi - \theta) = -(R_0 - r)\cos\theta$, $y_3 = (R_0 - r)(1 - \sin(\pi - \theta) = (R_0 - r)(1 - \sin\theta)$, $v_{3x} = v_3\cos(\theta - \pi/2) = v_3\sin\theta$, $v_{3y} = v_3\sin(\theta - \pi/2) = -v_3\cos\theta$. Kula forlater banen med starthastighet $\vec{v_3} = v_{3x}\hat{x} + v_{3y}\hat{y}$, faller mot bakken med konstant akselerasjon $\vec{a} = -g\hat{y}$, og treffer bakken i posisjon nr. 4 etter tiden t, slik at

$$y_4 = y_3 + v_{3y}t - \frac{gt^2}{2} = y_3 - v_3\cos\theta - \frac{gt^2}{2} = 0 \ (1)$$

og for x-koordinatet

$$x_4 = d = x_3 + v_{3x}t \Rightarrow t = \frac{d - x_3}{v_3\sin\theta} = \frac{\Delta x}{v_3\sin\theta}.$$

Substituerer for t i lign. (1)

$$\frac{g}{2v_3^2\sin^2\theta}\Delta x^2 + \cot\theta\Delta x - y_3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{-\cot\theta \pm \sqrt{\cot^2\theta + \frac{2gy_3}{v_3^2\sin^2\theta}}}{g/v_3^2\sin^2\theta} = \frac{-v_3^2\cos\theta\sin\theta}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gy_3}{v_3\cos^2\theta}}\right).$$

Her blir det positivt fortegn som gir relevant løsning. Tilslutt finnes avstanden d ved

$$\Rightarrow d = \Delta x + x_3.$$

27) Bruker energibevaring: $\Delta K + \Delta U = 0 = K_f - K_i + U_f - U_i$, og med startbetingelsen $K_i = 0$, fås $K_f = 1/2 I_t\omega^2 + 1/2 m_{tau}v^2 = 1/4 M_t R^2\omega^2 + 1/2 m_{tau}R^2\omega^2 = -\Delta U = U_i - U_f$.

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{U_i - U_f}{R^2(1/4M_t + 1/2m_{tau})}}$$

Velger referanse for potensiell energi der taustumpene på høyre og venstre side er i balanse, dvs. $U_{ref} = 0$ når $L_h = L_v = (L_{tau} - 0.6\ \text{m})/2 = L_0 = 3.7$ m. Vi har altså:

$$L_h + L_v = L = 2L_0 = 7.4\ \text{m}.$$

For start og slutttilstand $(j = i, f)$ må

$$L_h - L_v = \Delta L_j \Rightarrow L_h = \frac{\Delta L_j + L}{2}, L_v = L_h - \Delta L_j = \frac{L - \Delta L_j}{2}.$$

Ved å gjøre tyngdepunktsbetraktninger for taustumpene finner vi $y_{CM,ref} = L_0/2 = 1.65$ m, og for alle tilfeller $j = h, v; k = i, f$ blir $y_{CM,jk} = L_{jk}/2$. De ulike potensielle energiene blir: $U_{jk} = (y_{CM,ref} - y_{CM,jk})m_{jk}g = \Delta y_{CM,jk}L_{jk}\lambda g$. For venstre side $(j = v)$ finner vi: $\Delta y_{CM,vk} = y_{CM,ref} - y_{CM,vk} = L/4 - L_{vk}/2 = (L_{hk} - L_{vk})/4 = \Delta L_k/4$, og for høyre side fås $\Delta y_{CM,hk} = -\Delta L_k/4$.

Dermed blir de potensielle energiene:

$$U_i = (\Delta L_i/4)(L_{iv} - L_{ih})\lambda g = -\lambda g\Delta L_i^2/4$$

og

$$U_f = (\Delta L_f/4)(-\Delta L_f\lambda g) = -\lambda g\Delta L_f^2/4$$

Dermed:

$$\omega = \sqrt{\frac{U_i - U_f}{R^2(1/4M_t + 1/2m_{tau})}} = \sqrt{\frac{\lambda g(\Delta L_f^2 - \Delta L_i^2)}{R^2(M_t + 2m_{tau})}}$$

28) Har $\omega = c\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow \gamma = \omega_0\sqrt{1 - c^2}$ og $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(c\omega_0)$. Dette gir

$$A(T) = A_0\exp(-\gamma T) = A_0\exp(-2\pi\sqrt{1 - c^2}/c) \Rightarrow \frac{A(T)}{A_0} = \exp(-2\pi\sqrt{1/c^2 - 1}).$$

29) For energien finner vi

$$E(T) = 1/2kA^2(T) \Rightarrow \frac{E(T)}{E_0} = \frac{A^2(T)}{A_0^2} = \exp(-4\pi\sqrt{1/c^2-1}).$$

30) Likevekt:

$$\tau = MgL/2 - kx_0L = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{Mg}{2k}.$$

31) La $x = x_0 + L\theta$. N2-rot gir

$$\tau = MgL/2 - kxL = MgL/2 - kx_0L - kL^2\theta = -kL^2\theta = I\alpha = \frac{1}{3}ML^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3k}{M}\theta = 0,$$

dvs. EHO med $\omega_0 = \sqrt{3k/M} \Rightarrow T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3k}{M}}$.

32) Må bestemme eksplisitt form på svingningene for å kunne regne riktig utslag $x(t)$. Velger std. løsn. på form $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t + \phi)$, og bruker startbetingelsene $x(t = t_0) = 0 \Rightarrow \cos(\omega_0 t_0 + \phi) = 0 \Rightarrow \omega_0 t_0 + \phi = \pm\pi/2 \Rightarrow \phi = \pm\pi/2 - \omega_0 t_0$ og $v(t = t_0) = -x_0\omega_0\sin(\omega_0 t_0 + \phi) = v_{max} > 0 \Rightarrow \omega_0 t_0 + \phi = -pi/2$. Kombinerer de to betingelsene og finner $\phi = -\pi/2 - \omega_0 t_0$. Setter inn for ϕ i std. løsn. og får $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t - \omega_0 t_0 - \pi/2) = x_0\sin(\omega_0(t - t_0))$. Deretter er det bare å sette inn for t og t_0 fra oppgaveteksten og regne ut utslaget.

33) Velger et vilkårlig masselement dm langs fjæra i posisjon x'. Dersom fjæra har jevn massefordeling, og deformasjonen fordeles uniformt over hele fjæra, må det for ethvert masselement være slik at $x'/L = v'/v \Rightarrow v' = vx'/L$, der L er utslaget til hele fjæra/oscillatoren, og v er oscillatorens hastighet.

Kinetisk energi for dm blir

$$dK_f = \frac{1}{2}dmv'^2 = \frac{v^2}{2L^2}x'^2\lambda dx' = \frac{v^2}{2L^2}x'^2\frac{m}{L}dx'.$$

Finner bidraget for hele fjæra ved integrasjon

$$\Rightarrow K_f = \int_{fjaer} dK_f = \frac{m_f v^2}{2L^3}\int_0^L x'^2 dx' = \frac{1}{2}\frac{m_f v^2}{3}.$$

Dermed $K_{tot} = K_f + K_M = \frac{1}{2}(M + \frac{m_f}{3})v^2$. Energibevaring gir

$$E = U_{max} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = K_{max} = \frac{1}{2}(M + \frac{m_f}{3})\omega_0^2 x_{max}^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m_f}{3}}}.$$

Og

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \frac{T_{f+M}}{T_M} = \sqrt{1 + \frac{m_f}{3M}}.$$

34) Egenfrekvens $\omega_0 = 2\pi f_0$ gir (formelsamling)

$$A(\omega_0) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}} = \frac{1}{2\gamma\omega_0} F_0/m = cF_0/m \Rightarrow 2\gamma = 1/(c\omega_0).$$

Dermed blir

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = c\omega_0^2.$$

35) Systemet er isolert og konservativt, så eksakt maksimalhastighet bestemmes fra energibevaring

$$u_{max} = mgh = mgL(1 - \cos\theta_0) = K_{max} = \frac{1}{2} m v_{eks}^2 \Rightarrow v_{eks} = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)},$$

og for H.O har vi maks hasighet

$$v_{h.o.} = L\frac{d\theta}{dt} = -L\theta_0\omega_0 \sin\omega_0 t = -L\theta_0\sqrt{g/L} = -\theta_0\sqrt{gL}.$$

Dermed får vi

$$\frac{v_{h.o} - v_{eks}}{v_{eks}} = \frac{\theta_0\sqrt{gL} - \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}}{\sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}} = \frac{\theta_0}{\sqrt{2(1 - \cos\theta_0)}} - 1.$$

36) Konservativ kraft, så akselerasjonen skjer med energibevaring som føring

$$K = -\Delta U = (\gamma - 1)mc^2 = \left((1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1\right) mc^2$$

$$\Rightarrow (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 - \frac{\Delta U}{mc^2} \Rightarrow 1 - v^2/c^2 = \left(1 - \frac{\Delta U}{mc^2}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow v = c\left(1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta U}{mc^2}\right)^2}\right)^{1/2}.$$

37)

$$p_x = \gamma m u_x \Rightarrow u_x = \frac{p_x}{m}\frac{1}{\gamma} = \frac{p_x}{m}(1 - u_x^2/c^2)^{1/2} \Rightarrow u_x^2 = \frac{p_x^2}{m^2}(1 - u_x^2/c^2)$$

$$\Rightarrow u_x^2\left(1 + \frac{p_x^2}{m^2c^2}\right) = \frac{p_x^2}{m^2} \Rightarrow u_x = \frac{p_x}{m}\frac{1}{\left(1 + \frac{p_x^2}{m^2c^2}\right)^{1/2}}.$$

38) Bruker hastighetstransformasjon til å finne

$$\bar{u}_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}},$$

og får deretter

$$\bar{p}_x = \bar{\gamma} m \bar{u}_x = \frac{m}{\sqrt{1-\bar{u}_x^2/c^2}} \bar{u}_x.$$

39)Den kinetiske energien for restpartiklen blir

$$K_2 = E_2 - m_2c^2 = E_1 - E_3 - m_2c^2 = m_1c^2 - p_3c - m_2c^2 = (m_1 - m_2)c^2 - p_3c, \ (1)$$

, hvor impulsen og energien til fotonet er ukjent. Bruker energibevaring:

$$E_i = m_1c^2 = \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4} + p_3c = E_f \ (2),$$

og impulsbevaring:

$$\vec{p}_1 = 0 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_3 \Rightarrow |\vec{p}_2| = |\vec{p}_3| = p.$$

Setter inn for impulsene i lign (2) og finner

$$m_1c^2 = (p^2c^2 + m_2^2c^4)^{1/2} + pc \Rightarrow (m_1c^2 - pc)^2 = m_1^2c^4 - 2m_1pc^3 + p^2c^2 = p^2c^2 + m_2c^4$$
$$\Rightarrow 2m_1pc^3 = (m_1^2 - m_2^2)c^4$$
$$\Rightarrow pc = \frac{m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m_1}.$$

Substituerer for $p_3c = pc$ i lign. (1), og får:

$$K_2 = (m_1 - m_2)c^2 - \frac{(m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m_1}.$$

40) Angriper problemet differensielt, og deler opp stanga i masseelementer dm som utsettes for en differensiell gravitasjonskraft fra sfæren M. Siden staven ligger utenfor sfæren, vil vi kunne betrakte problemet som om vi har punktmasse M i origo, og evt. bidrag langs $\hat{y}$ og $\hat{z}$ kansellerer pga symmetri, slik at

$$dF = -\frac{GMdm}{x^2}.$$

Staven er oppgitt å være unifrom, dvs. $\lambda = m/L$, slik at $dm = \lambda dx$. Dermed:

$$\int d\vec{F} = \vec{F} = -\hat{x} \int_{x=L/3}^{x=L+L/3} \frac{GM\lambda}{x^2} dx = -\frac{GMm}{L} \left[-x^{-1}\right]_{x=L/3}^{x=L+L/3} \hat{x} = -\frac{GMm}{L} \left(\frac{L + L/3 - L/3}{L/3(L + L/3)} \right) \hat{x} = -\frac{9GMm}{4L^2} \hat{x}$$