**Løsningsforslag, eksamen FY1001 14 desember 2022**

1) Konstant akselerasjon. Fra uttrykkene i formelvedlegget finner vi ($x_0 = 0$):

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t^2 + \frac{2v_0}{a}t + \frac{2ax}{a} = 0 \Rightarrow t = -\frac{v_0}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{v_0^2 + 2ax},$$

og

$$v = v_0 + at = v_0 + a\left(-\frac{v_0}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{v_0^2 + 2ax}\right) = v_0 - v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2ax} \Rightarrow 2ax = v^2 - v_0^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = \frac{(50/3.6)^2 - (280/3.6)^2}{2 \cdot 900}\ \text{m/s}^2 \simeq -3.3\ \text{m/s}^2$$

---

2) Betrakter først kule, kloss og tau som et isolert system. Siden systemet er i vakuum, vil tyngdekraft utgjøre den eneste ytre krafta, som gir systemakselerasjon $a = g$. Om vi så betrakter kule og kloss hver for seg, ser vi at et eventuelt snordrag vil måtte redusere akselerasjonen til stålkula og øke akselerasjonen til treklossen, så snordraget må være $S = 0$.

---

3) Med snora som tilnærmet masseløs, fås et jevnt snordrag i hele snora. N2 gir: $Ma = 2F \Rightarrow a = 2F/M$.

---

4) Det er kun tyngdekraften som gjør arbeid på systemet, så vi kan anta energivbevaring:

$$E_1 = U_1 + K_1 = mga + 1/2mv_1^2 = mgb + 1/2mv_2^2 = U_2 + K_2 = E_2$$

$$\Rightarrow mv_2^2 = mv_1^2 + 2mg(a-b) \Rightarrow v_2 = \left[v_1^2 + 2g(a-b)\right]^{1/2}$$

---

5 a) Snordraget virker oppover skråplanet på den nederste klossen, og nedover skråplanet på den øverste klossen. Bruker N2 på hver av klossene

$$m_2 g \sin\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta - S = m_2 a \ (1)$$

og

$$m_1 g \sin\theta + S - \mu_1 m_1 g \cos\theta = m_1 a \ (2)$$

Ved å addere de to likningene får vi

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)g \sin\theta - (m_1\mu_1 + m_2\mu_2)g\cos\theta$$

$$\Rightarrow a = g\left[\sin\theta - \frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2}{m_1 + m_2}\cos\theta\right] \simeq 0.809\ \text{m/s}^2.$$

5 b) Fra lign. (2) over

$$S = m_1(a - g\sin\theta + \mu_1 g\cos\theta) = \simeq 0.176\ \text{N}$$

6) Bruker N1 på massen i midten: $Mg - k\Delta x_2 + F_3 = 0$, hvor $\Delta x_2$ er utslaget av den miderste fjæra, mens $F_3$ er trekkkrata fra den underste fjæra. Fjæra er i likevekt og tilnærmet masseløs, så $F_3 = k\Delta x_3 = mg$. Dermed

$$L = L_0 + \Delta x_2 = L_0 + 2mg/k \simeq 16.7 \text{ cm}$$

---

7) N2 på båten gir $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -b\vec{v} + \vec{N} + m\vec{g} = -b\vec{v}$, siden båtens akselerasjon er i vannplanet. Vi får dermed

$$m\frac{dv}{dt} = -bv \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \ln v(t) - \ln v_0 = \ln v(t)/v_0 = -\frac{b/m}{t}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}.$$

Vi kjenner hverken $b$ eller $m$ eller forholdet $b/m$, men det siste kan bestemmes fra tilleggsopplysningen $v(t_1 = 3.0s) = v_0/2$ som gir:

$$v_0/2 = v_0 e^{-t_1\frac{b}{m}} \Rightarrow \frac{b}{m} = \frac{\ln 2}{t_1} = 0.231 \text{ s}^{-1}.$$

$x(t)$, altså tilbakelagt distanse etter at motoren skrus av i $x(t = 0) = 0$ blir dermed

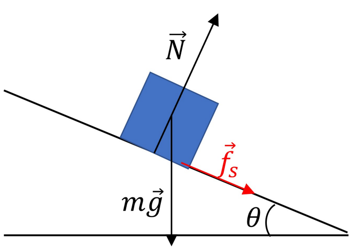
$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = v_0\int_0^t e^{-\frac{b}{m}t}dt = \frac{mv_0}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right).$$

Tilslutt ser vi på

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{mv_0}{b} \simeq 10.4 \text{ m}.$$

---

8)




a) Fra de ytre kreftene på bilen, angitt i figuren (rød $\vec{f}$ gjelder kun i oppg b)) blir N2 på komponentform:

$$\text{vertikalt: } N\cos\theta - mg = 0 \to N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\text{horisontalt: } N\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{v^2}{gr}\right) \simeq 16.6^\circ$$

b) Må legge til bidrag fra friksjonen i komponentligningene ovenfor,

$$\text{vertikalt: } N\cos\theta - mg - f_S \sin\theta = 0 \Rightarrow N(\cos\theta - \mu_s \sin\theta) = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta)} \ (1)$$

$$\text{horisontalt: } N\sin\theta + f_s \cos\theta = N(\sin\theta + \mu_s \ cos\theta) = m\frac{v^2}{r} \ (2)$$

Setter inn for $N$ i lign. (2) vba lign. (1)

$$\frac{mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}(\sin\theta + \mu_s \cos\theta) = \frac{mg}{\cos\theta(1 - \mu_s \tan\theta)}\cos\theta(\tan\theta + \mu_s) = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \tan\theta + \mu_s = \frac{v^2}{rg} - \frac{v^2}{rg}\mu_s \tan\theta \Rightarrow \mu_s = \frac{\frac{v^2}{rg} - \tan\theta}{1 + \frac{v^2}{rg}\tan\theta} \simeq 0.2.$$

---

9) Dersom bakken er lang nok vil syklisten nå likvektstilstanden, dvs. N1 for komponenten langs veibanen:

$$mg\sin\theta - f_R - Dv^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg\sin\theta - f_R}{D}} \simeq 10.27 \text{ m/s} = 37 \text{ km/t}.$$

---

10) Kun kontaktkrefter mellom perle og tråd, slik at normalkraften bidrar til sentripetalakselerasjonen, $a_r$ mens friksjonen bidrar til baneakselerasjon $a_\theta$. N2 gir

$$N = m\frac{v^2}{r} \text{ og } f = -\mu_k N = -\mu_k m\frac{v^2}{r} = ma_\theta = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu_k}{r}\int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = -\frac{\mu_k}{r}t$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_0} = -v\frac{\mu t}{r} + 1 \Rightarrow v\left(\frac{1}{v_0} + \frac{\mu t}{r}\right) = 1,$$

slik at

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{\mu v_0}{r}t}$$

---

11) Tar utgangspunkt i friksjon som eneste kilde til tap av mekanisk energi (normalkraften og tyngden står normalt på bevegelsen og vil ikke gjøre arbeid på systemet). Dermed vil friksjonsarbeidet alene måtte svare til endringen i kinetisk energi. Får

$$W_f = \int \vec{f}d\vec{r} = -\mu_k mg \int_0^{2\pi} Rd\theta = -\mu_k mgR2\pi = \Delta K = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}mv_0^2(\frac{9-16}{16}) = -\frac{7}{32}mv_0^2$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{7}{64}\frac{v_0^2}{\pi gR} \simeq 0.11.$$

12) Krafta som beskriver parvekselvirkningen

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{dr}\hat{r} \Rightarrow F(r) = -\frac{d}{dr}\left(U_0 r_0 r^{-1} e^{-r/r_0}\right) = U_0 r_0 e^{-r/r_0}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r r_0}\right).$$

Finner så $x$ ved

$$\frac{F(xr_0)}{F(r_0)} = \frac{\left[\frac{1}{x^2 r_0^2} + \frac{1}{x r_0^2}\right] e^{-x}}{\frac{2e^{-1}}{r_0^2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right] e^{-x+1} = 0.01 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0.02 e^{x-1}.$$

Den siste likninga må løses enten numerisk eller grafisk ved å plotte de to funksjonene som er skilt av likhetstegnet og finne skjæringspunktet til grafene, som gir løsninga for $x$. På en flervalgseksamen finnes en tredje mulighet - prøv innsetting av de ulike svaralternativene, som gir $x = 3.81$.

---

13) Massesenteret gitt ved

$$R_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r} dm = \frac{\hat{x}}{M}\int x dm + \frac{\hat{y}}{M}\int y dm = \frac{\hat{y}}{M}\int y dm = Y_{CM}\hat{y} \ (1),$$

hvor vi har benyttet at parabelen er symmetrisk om y-aksen, slik at x-koordinatet til massesenteret må være 0, som betyr at $\int x dm = 0$. Uniform flatetetthet $\sigma$ gir $dm = \sigma dA = \sigma x(y) dy = \sigma\sqrt{\frac{y}{a}} dy$, hvor uttrykket for parabelen $y = ax^2$ fra oppgaveteksten er invertert for å uttrykke $x(y)$. Erstatter nå $dm$ i (1), samtidig som vi introduserer $M = \int \sigma dA = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^b \sigma y^{1/2} dy$, slik at

$$Y_{CM} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{a}}\int_0^b y^{3/2} dy}{\frac{\sigma}{\sqrt{a}}\int_0^b y^{1/2} dy} = \frac{\frac{2}{5} b^{5/2}}{\frac{2}{3} b^{3/2}} = \frac{3}{5} b.$$

Kunne vi også valgt $dA = y dx$, med integrasjonsgrenser for $x$ fra $-\sqrt{b/a}$ til $\sqrt{b/a}$.

---

14) Isolert system, dvs. systemimpuls bevart. Velger et inertialsystem som følger raketten ved startbetingelsen, altså beveger seg med konstant hastighet 1.5 km/s, slik at totalimpulsen i dette systemet er 0, dvs

$$m_d v_d + m_r v_r = 0 \Rightarrow v_r = -\frac{m_d v_d}{m_r} \simeq 26.57 \text{ km}s.$$

Tilslutt legger vi til hastigheten til intertialsystemet, slik at slutthastigheten relateres til et system som er i ro. Dermed $v_r = 28.07$ km/s.

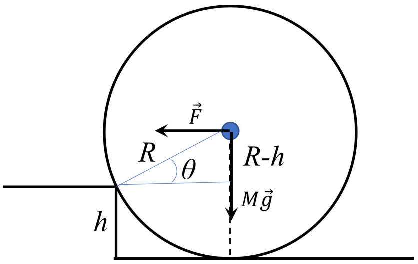
---

15) Har

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = x F_y (\hat{x} \times \hat{y}) + y F_x (\hat{y} \times \hat{x}) = R\frac{\sqrt{2}}{2}(F_y - F_x)\hat{z} = \hat{z} \cdot (\frac{0.27\sqrt{2}}{4}(38.6 + 31) \text{ Nm}) \simeq \hat{z} \cdot 6.64 \text{ Nm}.$$

---

16)




For at hjulet skal kunne klatre opp trinnet, må krafta $\vec{F}$ være stor nok til at hjulet får et netto dreiemoment ut av figurplanet om en akse gjennom kontaktpunktet med trappetrinnet. I det yeblikket hjulet begynner klatringen, vil normalkraften virke i dette kontakpunktet, radielt inn mot hjulets sentrum, og vil dermed ikke bidra til dreiemomentet. Dermed må $\vec{F}$ balansere ut dreiemomentet fra tyngden, som peker inn i figurplanet. Ved likevekt

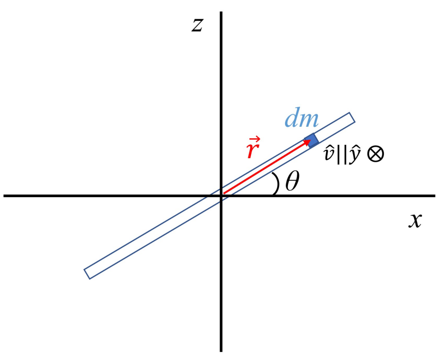
$$\tau = (R-h)F_{eq} - RMg\cos\theta = 0 \Rightarrow F_{eq} = \frac{RMg}{R-h}\frac{(R^2-(R-h)^2)^{1/2}}{R} = \frac{Mg(R^2(1-(1-\frac{h}{R})^2)^{1/2}}{R(1-\frac{h}{R})}$$

$$= Mg\frac{(1-(1-\frac{h}{R})^2)^{1/2}}{1-\frac{h}{R}} \simeq 15.996 \text{ N}.$$

Dermed må $F > F_{eq}$, altså omlag 16 N, for at hjulet skal kunne klatre opp trinnet.

---

17)




Ser på et lite masseelement, $dm$ i posisjon $\vec{r}$, som vist i figuren. Dreieimpulsbidraget fra dette elementet blir

$$d\vec{l} = dm\vec{r}\times\vec{v} = dmr(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{z})\times(r\omega\cos\theta\hat{y}) = dmr^2\omega\left(\cos^2\theta\hat{z} - \sin\theta\cos\theta\hat{x}\right).$$

Staven har jevnt fordelt masse, så $dm = \frac{M}{L}dr$. Total dreieimpuls finnes nå ved å integrere opp $d\vec{l}$ bidragene over stavens lengde:

$$\vec{L} = \frac{M}{L}\omega\left(-\sin\theta\cos\theta\hat{x}+\cos^2\theta\hat{z}\right)\int_{-L/2}^{L/2} r^2 dr = \frac{M}{L}\omega\frac{r^3}{3}\Big|_{-L/2}^{l/2}\left(-\sin\theta\cos\theta\hat{x}+\cos^2\theta\hat{z}\right)$$

$$= \frac{M}{12}L^2\omega\left(-\sin\theta\cos\theta\hat{x}+\cos^2\theta\hat{z}\right) \simeq -\hat{x}\cdot 0.44 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{s}^{-1} + \hat{z}1.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{s}^{-1}.$$

18) Stanga roterer om en akse gjennom massesenteret, mens de to kulene roterer om en akse i avstand $d = 0.5$ m $= 5R$ fra massesenterene. Finner treghetsmoment for hver av kulene ved å bruke Steiners sats, som gir $I_k = I_0 + 25M_kR^2 = \frac{127}{5}M_kR^2$, og dermed totalt treghetsmoment

$$I_{tot} = I_s + 2I_k = \frac{M_SL^2}{12} + 2 \cdot \frac{127M_kR^2}{5} = 2.62 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

---

19) Siden de to legemene har samme rotasjonsenergi, (i tillegg til lik masse og radius), får vi

$$\frac{1}{2}I_s\omega_s^2 = \frac{1}{2}I_k\omega^2 \Rightarrow \omega_s = \omega\sqrt{\frac{I_k}{I_s}} = \omega\sqrt{\frac{2/5}{1/2}} = \omega\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

---

20)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\sin(\omega t + \phi)\right) = A\omega\cos(\omega t + \phi),$$

og ved $t = 0$ får vi

$$v(t = 0) = A\omega\cos\phi = 0.08 \cdot 25\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s} \simeq 1.73 \text{ m/s}.$$

---

21) a) Finnner først dreieimpulsen til systemet

$$L = 2mR_tv + I_t\omega = 2mR_tv + \frac{1}{2}m_tR_t^2\frac{v}{R} = R_t(2m + \frac{1}{2}m_t)v,$$

med retning ut av figurplanet. Dreiemoment på systemet blir

$$\tau = R_tmg = \frac{dL}{dt} = R_t(2m + \frac{1}{2}m_t)\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow a = g\frac{m}{2m + \frac{1}{2}m_t} = \frac{g}{2 + \frac{m_t}{2m}} \simeq 4.67 \text{ m/s}^2.$$

b) Uttrykket for dreieimpulsen blir som i a), men nå vil friksjonen i bordflata gi det bidrag til dreiemomentet, så vi får

$$\tau = R_tmg - R_tf = R_tmg(1 - \mu_k) = \frac{dL}{dt} = R_t(2m + \frac{1}{2}m_t)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{g(1 - \mu_k)}{2 + \frac{m_t}{2m}} = a_a(1 - \mu_k) = 3.27 \text{ m/s}^2.$$

c) Oppgaven kan løses på flere måter, men den enkleste er nok å bruke at systemene i a) og c) er konservative, slik at mekanisk energi er bevart. Med start fra samme posisjon vil de to systemene ha lik potensiell energi, og dermed den samme kinetiske energien, men hastighetene (og akselerasjonen) blir forskjellig siden vi i c) må legge til rotasjonsenergien for sylinderen som ruller langs bordet. Vi får dermed:

$$K_C = \frac{1}{2}(2mv_c^2 + \frac{1}{2}(m_t + m)v_c^2) = \frac{1}{2}(2mv_a^2 + \frac{1}{2}m_t v_a^2) \Rightarrow v_c = v_a\sqrt{\frac{4m + m_t}{5m + m_t}}$$

$$\Rightarrow a_c = \frac{dv_c}{dt} = a_a\sqrt{\frac{4m + m_t}{5m + m_t}} \simeq 4.2 \text{ m/s}^2.$$

---

22) Fra figuren sees det at perioden er på omlag 6.3 s, som gir $\omega = 2\pi/T \simeq 1 \text{ s}^{-1}$, og at dempingskoeffisienten må tilfredstille $e^{-\gamma T} = 0.99 \Rightarrow \gamma = -\ln(0.99)/T \simeq 1.595 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Siden $\gamma << \omega$ har vi svak demping, slik at $\omega \simeq \omega_0$, og $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{T\gamma} = \frac{2\pi}{-\ln(0.99)} \simeq 312.6$

---

23) a) Fullstendig uelastisk støt, dvs. både impuls og dreieimpuls er bevart. Ser på dreieimpuls før og etter støtet:

$$\vec{L}_f = \vec{r}_p \times \vec{p}_p = \frac{l}{2} m_p v_f \hat{L}_f,$$

og

$$\vec{L}_e = (mv_e\frac{l}{2} + I\omega)\hat{L}_e = \left(mv_e\frac{l}{2} + \left(\frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{4}\right)^2\right)\omega\right)\hat{L}_e = mv_e\frac{l}{2} + \frac{7}{48}l^2,$$

hvor $\hat{L}_f = \hat{L}_e$ peker ut av figurplanet. Videre er $\omega = \frac{2v_e}{l}$. Setter inn for $\omega$ i uttrykket for $\vec{L}_e$, og krever at dreieimpulsen er bevart, som gir:

$$mv_f l = mv_e l + 2\frac{7}{48}Ml^2\frac{2v_e}{l} = v_e l\left(m + \frac{7}{12}M\right) \Rightarrow v_e = \frac{m}{m + \frac{7}{12}M}v_f = \frac{1}{1 + \frac{7}{12}\frac{M}{m}}v_f.$$

Dermed:

$$\omega = \frac{2v_e}{l} = \frac{2}{1 + \frac{7}{12}\frac{M}{m}}\frac{v_f}{l} \simeq 17.6 \text{ s}^{-1}$$

b) Svingeperioden $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I/(m+M)gd}$, hvor $I = I_A = m(l/2)^2 + I_0 + M(l/4)^2 = ml^2/4 + 7Ml^2/48$. $d$ er avstanden fra opphengspunktet A til massesenteret for legemet (stav + prosjektil), der massesenterposisjonen blir:

$$r_{cm} = \frac{Ml/2 + 3ml/4}{M + m} = l/2\frac{M + 3m/2}{M + m} = 0.669 \text{ m},$$

som gir

$$d = |l/4 - r_{cm}| = 0.357 \text{ m}.$$

Dermed

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(m/4 + 7M/48)l^2}{(m + M)gd}} =\simeq 1.68s$$

24) Isolert system, dvs. energi og impuls bevart. Energibevaring gir: $\Delta K + \Delta U = 0 = K_f - K_i + U_f - U_i$, og med startbetingelsen $K_i = 0, U_i(r \to \infty) = 0$

$$\Rightarrow K_f = 1/2 m_1 v_1^2 + 1/2 m_2 v_2^2 = -\frac{G m_1 m_2}{r} = -U_f \ (1),$$

og impulsbevaring gir

$$p_f = m_1 v_1 + m_2 v_2 = p_i = 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2 \ (2).$$

Erstatter $v_1$ i lign. (1) med uttrykket fra lign. (2), som gir

$$(m_1 \frac{m_2^2}{m_1^2} + m_2) v_2^2 = \frac{2 G m_1 m_2}{r} \Rightarrow (\frac{m_2}{m_1} + 1) v_2^2 = \frac{2 G m_1}{r} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2 G m_1^2}{r(m_1 + m_2)}} \simeq 34 \mu\text{m/s},$$

og $v_1$ kan bestemmes v.b.a. lign (2)

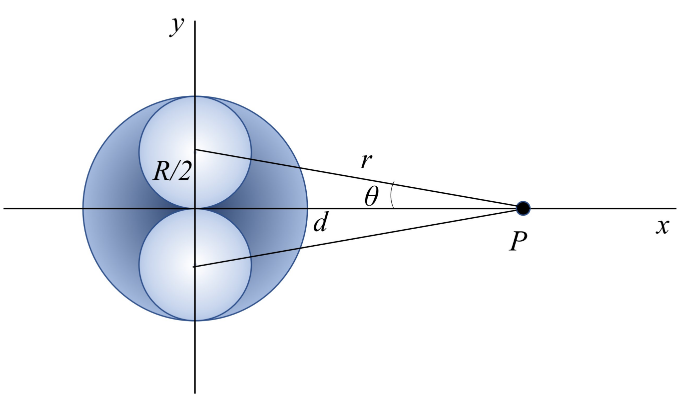
$$v_1 = -\sqrt{\frac{2 G m_2^2}{r(m_1 + m_2)}} \simeq 130 \mu\text{m/s}.$$

---

25) Bruker K3 på gjennomsnittsbanene til jorda og Icarus, som gir: $r_I = r_j \left(\frac{T_i}{T_j}\right)^{2/3} \simeq 1.08 r_j = 1.08$ AU. Som en liten tilleggsopplysning nevnes det at banen til Icarus er ekstremt elliptisk med eksentrisitet $\epsilon \simeq 0.83$, slik at avstanden mellom Icarus og sola varierer fra omlag 0.18-2 AU, dvs. at Icarus sin bane krysser samtlige planetbaner fra Merkur til Mars, og har antakelig en ikke-neglisjerbar sannsynlighet for å krasje inn i en av planetene på et eller annet tidspunkt.

---

26)




Bruker standardresultatet fra feltbetraktningene som sier at feltet utenfor et legeme med sfærisk symmetri er symmetrisk og med feltstyrke som om all massen til legemet var samlet i origo (massesenteret). Dermed vil bidraget i P fra den kompakte massen være $\vec{g_M} = -GM/d^2 \cdot \hat{x}$. For hulrommene tar vi utgangspunkt i negativ massetetthet, dvs.

$$\rho_h = -\rho_M = -\frac{3M}{4\pi R^3} \Rightarrow m_h = \int_0^{R/2} \rho_h 4\pi r^2 dr = -\frac{3M}{R^3}\frac{r^3}{3}\Big|_0^{R/2} = -\frac{M}{8},$$

og for å beregne feltbidragene fra hulrommene i P, må vi ta hensyn til geometrien i figuren over. Vi får

$$\vec{g}_h = \frac{-G(-M)}{8r^2}\hat{r} = \frac{GM}{8(d^2+(R/2)^2)}(\cos\theta\hat{x} \pm \sin\theta\hat{y}),$$

der fortegnene foran $\hat{y}$-termen viser til henholdsvis øvre og nedre hulrom. Når vi legger de to hulromsbidragene sammen vil altså $\hat{x}$-termene adderes, mens $\hat{y}$-termene kansellerer hverandre. Totalfeltet blir

$$\vec{g}_{tot} = \vec{g}_M + \vec{g}_{h+} + \vec{g}_{h-} = (-\frac{GM}{d^2} + 2\frac{GM}{8(d^2+(R/2)^2)}\cos\theta)\hat{x} = -GM\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{4(d^2+(R/2)^2)}\frac{d}{(d^2+(R/2)^2)^{1/2}}\right)\hat{x}$$

$$= -GM\left(\frac{1}{d^2} - \frac{d}{4(d^2+R^2/4)^{3/2}}\right)\hat{x} = -\frac{GM}{d^2}\left(1 - \frac{d^3}{4(d^2+R^2/4)^{3/2}}\right)\hat{x}.$$

---

27)

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{\Delta\bar{t}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = v^2\frac{\Delta\bar{t}^2}{L^2} \Rightarrow v^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{\Delta\bar{t}^2}{L^2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow v = c\left(1 + \left(\frac{c\Delta\bar{t}}{L}\right)^2\right)^{-1/2} \simeq 0.79c.$$

---

28) Velger $\bar{S}$ slik at det følger den opprinnelige partiklen, slik at systemimpulsen målt i dette systemet er 0. Dermed fås

$$p_f = p_e = p_{m1} + p_{m2} = 0 \Rightarrow p_{m1} = -p_{m2},$$

altså har de to resultantpartiklene like store, motsatt rettede impulser. Og siden de har den samme massen, vil dette også gjelde hastighetene. Bruker energibevaring til  bestemme resultantpartikkelhastighetene i $\bar{S}$:

$$Mc^2 = 2\bar{\gamma_e}mc^2 \Rightarrow \bar{\gamma_e} = (1-\frac{\bar{u}_x^2}{c^2})^{-1/2} = \frac{M}{2m} \Rightarrow \frac{\bar{u}_x^2}{c^2} = 1 - \frac{4m^2}{M^2} \Rightarrow \bar{u}_x = \pm c\sqrt{1-\frac{4m^2}{M^2}} \simeq \pm 0.714c.$$

Hastigheten til $\bar{S}$ relativ $S$ som er i ro blir

$$\gamma_{\bar{S}S} = (1-v^2/c^2)^{-1/2} = 3 \Rightarrow 9(1-v^2/c^2) = 1 \Rightarrow v = c\sqrt{8/9} \simeq 0.943c.$$

Bruker tilslutt Lorentstransformen for $u_x$ (se formelsamling), som gir

$$u_{x1} = \frac{v+\bar{u}_x}{1+\frac{\bar{u}_x v}{c^2}} \simeq 0.99c \text{ og } u_{x2} = \frac{v-\bar{u}_x}{1-\frac{\bar{u}_x v}{c^2}} \simeq 0.70c.$$