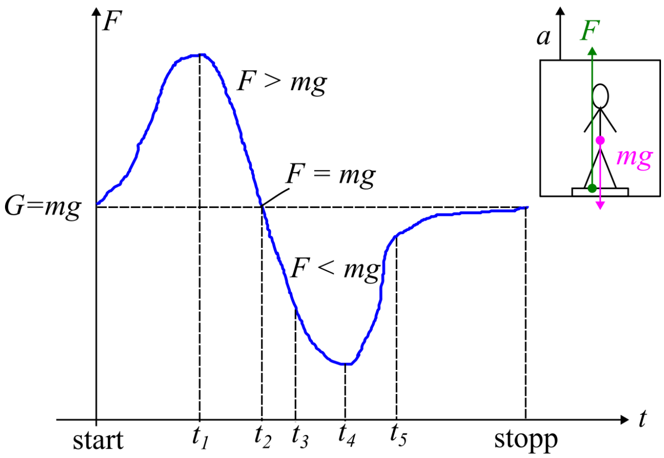
Oppgave 1

Ettersom km $= 10^3$ m og h $= 3600$ s, får vi

$$
\begin{aligned}
1,0\,\mathrm{km/h^2} &= 1,0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h^2}} \\
&= \frac{10^3\,\mathrm{m}}{(3600\,\mathrm{s})^2} \\
&= \underline{\underline{7,7\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

De ulike fasene av heisturen er antydet i figuren under.



Ut i fra problemstillingen er det klart at vekta viser personens tyngde $G = mg$ i startsituasjonen.

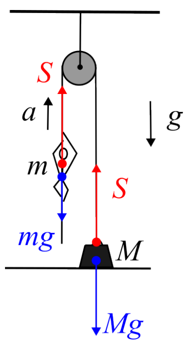
Farten oppover øker så lenge akselerasjonen oppover er positiv. To vertikale krefter virker på personen inne i heisen: tyngden G og kraften F fra vekta[1]. Newtons 2. lov på personen gir at

$$F - mg = ma,$$

dvs. akselerasjonen er positiv og farten **øker** så lenge $F > mg$. Ut i fra figuren er $F = mg$ ved t_2, dvs. farten er maksimal ved t_2.

Oppgave 3

Figuren under viser kreftene på akrobaten og loddet når det klatres med en akselerasjon a oppover. På akrobaten virker tyngden mg og snordraget S. På loddet virker et like stort snordrag S (når tauet antas masseløst, og trinsa er friksjonsfri), og tyngden Mg.



I grensetilfellet at det klatres så raskt at loddet akkurat mister bakkekontakten, er

$$S = Mg,$$

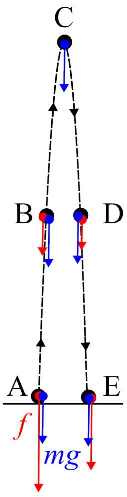
[1] Vekta viser motkrafta til F; krafta fra personen på vekta, som er like stor og motsatt rettet fra Newtons 3. lov

som sammen med Newtons 2. lov anvent på akrobaten gir følgende maksimale akselerasjon for akrobaten:

$$\begin{aligned} S - mg &= ma \\ Mg - mg &= ma \\ a &= \frac{Mg - mg}{m} \\ &= \underline{\underline{\left(\frac{M-m}{m}\right) g}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

Figuren under viser kreftene som virker på ballen under de ulike delene av bevegelsen: tyngden mg og luftmotstanden $f \sim v^2$.

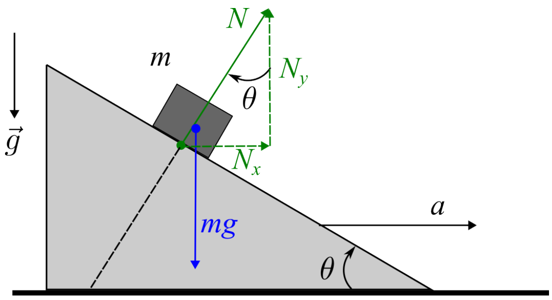


På **vei opp** virker både luftmotstanden $\vec{f} = -Dv^2\hat{v}$ og tyngdekraften $\vec{G} = -mg\hat{y}$ i samme retning; nedover. Luftmotstanden har størst verdi når farten er størst, som er i punkt A (ballen mister hele tiden mekanisk energi på grunn av luftmotstanden; det er ingen av de senere angitte punktene på figuren der farten er større).

Riktig påstand: Akselerasjonen til kula er størst i punkt A (like etter at ballen er kastet).

Oppgave 5

Figuren under viser kreftene som virker på klossen som ligger i ro på skråplanet, når skråplanet har en akselerasjon a mot høyre.



Newtons 1. lov på klossen:

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma,\ \sum F_y = 0 \\ N_x = ma,\ N_y = mg \end{aligned}$$

Ut i fra figuren er $N_x = N_y \tan\theta = mg\tan\theta$, som gir

$$\begin{aligned} N_x &= ma \\ mg\tan\theta &= ma \\ a &= \underline{\underline{g\tan\theta}} \end{aligned}$$

Oppgave 6

At bilen akkurat klarer å stoppe til en sluttfart $v = 0$ i løpet av strekningen s fra en startfart v_1, betyr at

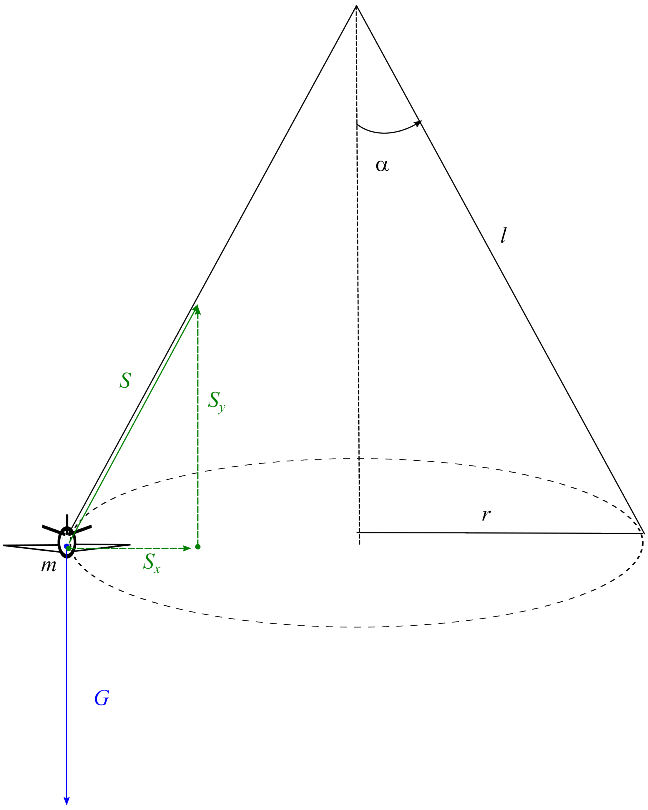
$$0^2 - v_1^2 = 2as \Rightarrow 2as = -v_1^2.$$

Ettersom friksjonskraften antas konstant, og dette er den eneste horisontale kraften som virker på bilen, vil bilen ha samme (oppbremsings-)akselersjon i situasjon 2 - dette følger fra Newtons 2. lov. Sluttfarten v i situasjon 2, der startfarten er v_2, blir da gitt ved

$$\begin{aligned} v_2^2 - v^2 &= 2as \\ v_2^2 - v^2 &= -v_1^2 \\ v &= \sqrt{v_2^2 - v_1^2} \\ &= \sqrt{(80\,\mathrm{km/h})^2 - (70\,\mathrm{km/h})^2} \\ &= 38,7\,\mathrm{km/h} \\ &\approx \underline{\underline{39\,\mathrm{km/h}}} \end{aligned}$$

Oppgave 7

Figuren under viser kreftene som virker på flyet: snorkraften S og tyngden G:



Ettersom flyet ikke beveger seg i y-retningen, er

$$S_y = mg,$$

Newtons 2. lov for sirkelbevegelsen gir (via

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ S_x &= m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} \end{aligned} \qquad \text{(Formel for sentripetalaks.)}$$

Fra trignometri er dessuten

$$S_x = S_y \tan\alpha = mg\tan\alpha,$$

slik at

$$
\begin{aligned}
mg\tan\alpha &= m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\
\tan\alpha &= \frac{4\pi^2 r}{gT^2}
\end{aligned}
$$

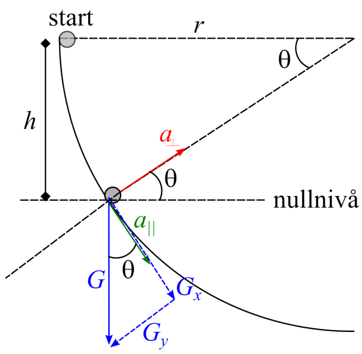
Fra figurer er radiusen r i sirkelen gitt ved

$$r = l\sin\alpha,$$

som gir

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{4\pi^2 \cdot l\sin\alpha}{gT^2} \\
\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{4\pi^2 \cdot l\sin\alpha}{gT^2} && \text{(Trig. identitet)} \\
\frac{1}{\cos\alpha} &= \frac{4\pi^2 \cdot l}{gT^2} && \text{(Forkorter)} \\
\cos\alpha &= \frac{gT^2}{4\pi^2 l} \\
\alpha &= \underline{\underline{\arccos\left(\frac{gT^2}{4\pi^2 l}\right)}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 8



Som figuren over viser, har legemets akselerasjon to komponenter: tangentiell akselerasjon $a_\parallel$, og sentripetal-/radiellakselerasjon $a_\perp$.

Tangentiellkomponenten er bestemt fra Newtons 2. lov i tangentiell retning (kalt x-retning på figuren):

$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= ma_\parallel \\
mg\cos\theta &= ma_\parallel \\
a_\parallel &= \underline{g\cos\theta}
\end{aligned}
$$

Sentripetalakselerasjonen, med retning inn mot sentrum, har verdi

$$a_\perp = \frac{v^2}{r}.$$

Energibevaring for legemet gir oss farten v som funksjon av θ:

$$
\begin{aligned}
mgh &= \frac{1}{2}mv^2 \\
mgr\sin\theta &= \frac{1}{2}mv^2 \\
v^2 &= \underline{2gr\sin\theta}
\end{aligned}
$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} a_\perp &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{2gr\sin\theta}{r} \\ &= \underline{2g\sin\theta} \end{aligned}$$

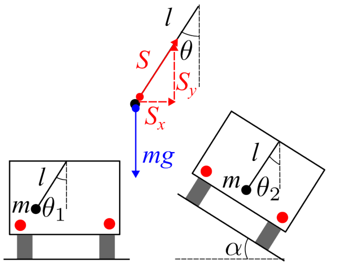
Den totale akselerasjonen a er da

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_\perp^2 + a_\parallel^2} \\ &= \sqrt{(2g\sin\theta)^2 + (g\cos\theta)^2} \\ &= g\sqrt{4\sin^2\theta + \cos^2\theta} \\ &= g\sqrt{3\sin^2\theta + 1} \qquad \text{(Identitet: } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\text{)} \end{aligned}$$

Ettersom $0° \leq \theta \leq 90°$ og sinus er voksende i dette intervallet, vil a være størst når legemet er i nederste punkt, dvs. $\theta = 90°$.

Oppgave 9

Figuren under viser kreftene som virker på pendelkula generelt, i det vinkelen mellom vertikalen og pendelsnora er θ, og svingradiusen er R.



Newtons 2. lov på pendelkula:

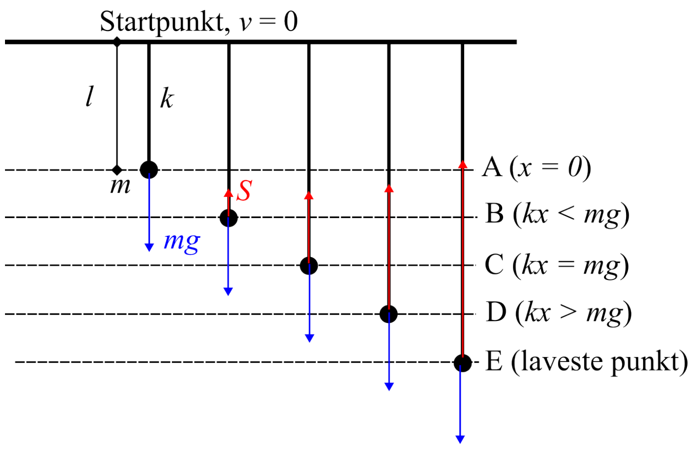
$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x = m\frac{v^2}{R} \\ S_x &= m\frac{v^2}{R} \\ S_y\tan\theta &= m\frac{v^2}{R} \\ mg\tan\theta &= m\frac{v^2}{R} \\ \tan\theta &= \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$

Dette viser at vinkelen θ kun avhenger av v og R (og ikke av doseringsvinkelen α): ettersom v og R er spesifiserte å være de samme i de to tilfellene (udosert og dosert sving), vil

$$\theta_1 = \theta_2.$$

Oppgave 10

a) Figuren under viser de to kreftene som virker på strikkhopperen når man neglisjerer luftmotstand: tyngden mg og snordraget/strikkraften $S = kx$.



Akselerasjonen nedover er positiv, dvs. farten nedover øker, så lenge $mg > kx$. Maks. fart nås i punktet der $mg = kx$, dvs. punkt C på figuren.

b) Akselerasjonen er størst i det punktet der kraftsummen på hopperen er størst. Det er 2 kandidater til slike punkt: punkt A (før strikket strammes) og punkt E (nederste punkt i hoppet). I punkt A er akselerasjonen lik g, så vi må undersøke hvorvidt akselerasjoneni i punkt E er større eller mindre enn dette.

Kvalitativt argument: Dersom farten i A hadde vært 0 (dvs. "strikkhoppet" startet i det punktet der strikken har sin ustrukkede lengde l), ville forlengelsen av strikken være gitt ved $\frac{1}{2}kx^2 = mgx$, slik at $x = \frac{2mg}{k}$ og maks. snordrag $S = kx = 2mg$. Akselerasjonen i det nederste punktet ville være gitt ved

$$\sum F = S - mg = ma \Rightarrow a = \frac{S - mg}{a} = \underline{g}$$

I strikkhoppet er $v > 0$ i A; forlengelsen x blir enda større, og akselerasjonen i E større enn g.

Regneteknisk argument: Vi kan regne ut aks. i nederste punkt ved å finne den maksimale forlengelsen x av strikket. Bevaring av mekanisk energi mellom startpunktet og det laveste punktet, med nullnivå i E (potensiell energi i tyngdefeltet går over til potensiell energi i strikken):

$$mg\,(l + x) = \frac{1}{2}kx^2$$
$$\frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgl = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}k \cdot (-mgl)}}{2 \cdot \frac{1}{2}k} \\ &= \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 \left(1 + \frac{2kl}{mg}\right)}}{k} \\ &= \frac{mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}\right) \end{aligned}$$

Ettersom x skal være positiv her, er den gyldige løsningen

$$x = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}\right).$$

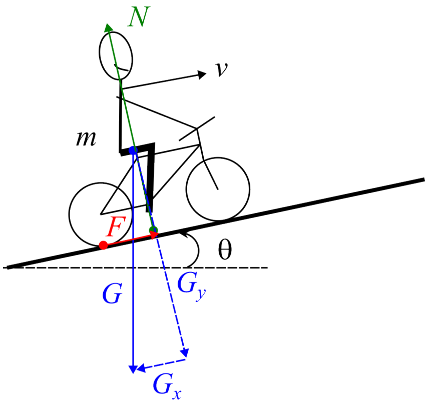
Den maksimale kraften fra strikket, som finnes i punkt E, er da lik $S = kx$ og akselerasjonen (retning oppover) er gitt fra Newtons 2. lov:

$$
\begin{aligned}
S - mg &= ma \\
kx - mg &= ma \\
a &= \frac{kx}{m} - g \\
&= \frac{k}{m} \cdot \frac{mg}{k}\left(\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}\right)\right) - g \\
&= \underline{g \cdot \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}}
\end{aligned}
$$

Dette viser at $a > g$ i punkt E, dvs. akselerasjonen har størst absoluttverdi i E.

Oppgave 11

Figuren under viser kreftene som virker på syklisten når det ikke virker luftmotstand: tyngden mg og normalkraften N.



For å opprettholde konstant fart oppover bakken, må altså syklisten besørge en kraft $F = G_x = mg\sin\theta$. Arbeidet som denne gjør langs en strekning s langs bakken, er da

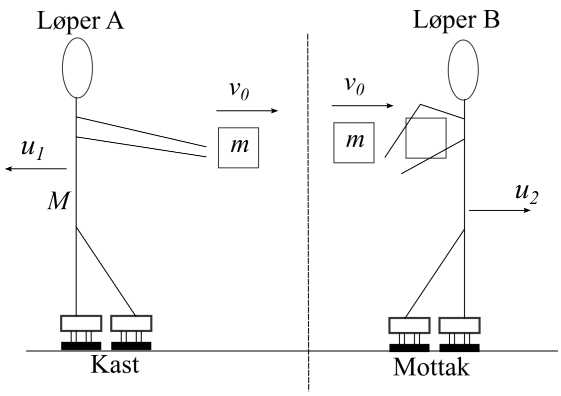
$$W = Fs,$$

slik at effekten P som må produseres er da gitt ved

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{W}{t} && \text{(Def. av effekt)} \\
&= \frac{Fs}{t} \\
&= Fv && \text{(Konstant fart } v = s/t\text{)} \\
&= mg\sin\theta \cdot v \\
&= 80\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \sin 10^\circ \cdot \frac{10}{3{,}6}\,\mathrm{m/s} \\
&= 379\,\mathrm{W} \\
&\approx \underline{\underline{0{,}38\,\mathrm{kW}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 12

Figuren under viser de to separate prosessene: den ene løperen kaster kassa fra seg, og den andre tar i mot.



Farten u_1 til løper A (som er i ro til å begynne med) etter at pakka er kastet til løper B:

$$\sum_{før} p = \sum_{etter} p$$
$$0 = Mu_1 + mv_0$$
$$\underline{u_1 = -\frac{m}{M}v_0}$$

Farten til løper B etter å ha mottatt pakka som har startfart v_0 (dette blir et fullstendig uelastisk støt da personen holder fast i pakken):

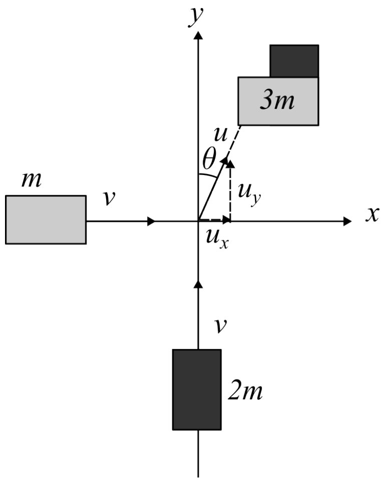
$$\sum_{før} p = \sum_{etter} p$$
$$mv_0 = (M + m)\, u_2$$
$$u_2 = \frac{m}{M + m} v_0$$

Relativfarten mellom de to blir da

$$u_2 - u_1 = \frac{m}{M+m}v_0 - \left(-\frac{m}{M}v_0\right)$$
$$= \underline{\underline{\left(\frac{m}{M+m} + \frac{m}{M}\right) v_0}}$$

Oppgave 13

Figuren under viser situasjonen før og etter den fullstendig uelastiske kollisjonen mellom de to bilene.



Setter opp bevaring av bevegelsesmengde i x- og y-retning, og uttrykker alle størrelser ved sluttfarten u og vinkelen θ:

x-retning:

$$\sum_{\text{før}} p_x = \sum_{\text{etter}} p_x$$
$$mv = 3mu_x$$
$$\underline{u_x = \frac{1}{3}v}$$

y-retning:

$$\sum_{\text{før}} p_y = \sum_{\text{etter}} p_y$$
$$2m \cdot v = 3mu_y$$
$$\underline{u_y = \frac{2}{3}v}$$

Fellesfarten u etter støtet er da

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}v\right)^2 + \left(\frac{2}{3}v\right)^2} \\ &= v\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9}} \\ &= v\sqrt{\frac{5}{9}} \\ &= \underline{\underline{v \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}}} \end{aligned}$$

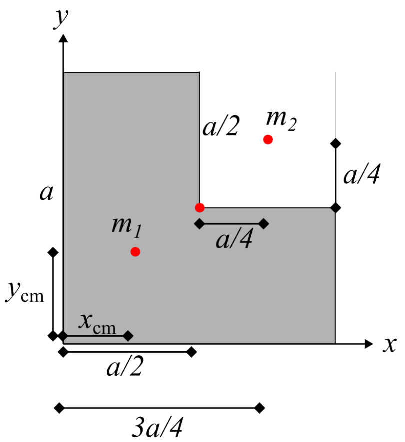
Vinkelen θ er gitt ved

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{u_x}{u_y} \\ &= \frac{\frac{1}{3}v}{\frac{2}{3}v} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 26,6^\circ \\ &\approx \underline{\underline{27^\circ}} \end{aligned}$$

Oppgave 14

Figuren under viser legemet vi skal finne tyngdepunktet for. I tråd med hintet gitt i oppgaven, er massesenteret for hele plata, samt det kvadratiske avskjæret, markert.



La $m_1$være massen til plata vi skal finne massesenteret for, mens m_2 er massen til den bortskjærte delen. x-koordinaten til tyngepunktet finnes fra hintet, ettersom opprinnelig plate + bortskjært del tilsammen skal ha massesenteret i kvadratets sentrum:

$$\frac{m_1 \cdot x_{\text{cm}} + m_2 \cdot \frac{3}{4}a}{m_1 + m_2} = \frac{a}{2}$$

$$m_2 = \sigma \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Den opprinnelige kvadratiske plata har masse

$$m = m_1 + m_2 = \sigma \cdot a^2,$$

der σ [kg/m^2] angir platas konstante massetetthet. Da er

$$m_2 = \sigma \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \sigma \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}m,$$

$$m_1 = m - m_2 = \frac{3}{4}m$$

Dette gir:

$$\begin{aligned}
\frac{m_1 \cdot x_{\text{cm}} + m_2 \cdot \frac{3}{4}a}{m_1 + m_2} &= \frac{a}{2} \\
\frac{\frac{3}{4}m \cdot x_{\text{cm}} + \frac{1}{4}m \cdot \frac{3}{4}a}{m} &= \frac{a}{2} \\
\frac{3}{4}x_{\text{cm}} + \frac{3}{16}a &= \frac{a}{2} \\
x_{\text{cm}} &= a\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\right)}{\frac{3}{4}} \\
&= \underline{\frac{5}{12}a}
\end{aligned}$$

Ut i fra symmetrien til legemet, ser vi at y_{cm} vil få samme verdi;

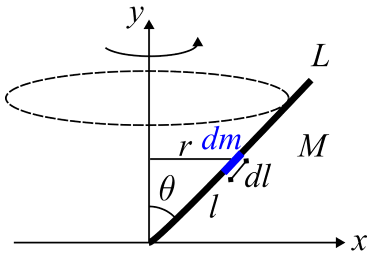
$$y_{\text{cm}} = \frac{5}{12}a$$

Tyngdepunktet har altså koordinatene

$$(x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}}) = \underline{\underline{\left(\frac{5}{12}a, \frac{5}{12}a\right)}}$$

Oppgave 15

Figuren under viser stanga med y-aksen som rotasjonsakse. Stanga er delt inn i masseelementer dm, som befinner seg i avstand r fra rotasjonsaksen.



Fra definisjonen av treghetsmoment har masseelementet dm et treghetsmoment om y-aksen gitt ved

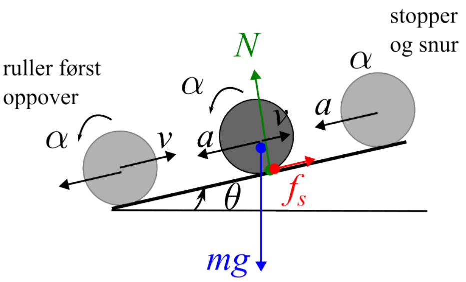
$$dI = r^2 dm,$$

der $dm = \frac{M}{L}dl$ og $r = l\sin\theta$. Integrerer over lengden av stanga:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L r^2 dm \\ &= \int_0^L (l\sin\theta)^2 \cdot \frac{M}{L} dl \\ &= \frac{M}{L}\sin^2\theta \int l^2 dl \\ &= \frac{M}{L}\sin^2\theta \cdot \left[\frac{1}{3}l^3\right]_0^L \\ &= \frac{1}{3}\frac{M}{L}\sin^2\theta \cdot L^3 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}ML^2\sin^2\theta}} \end{aligned}$$

Oppgave 16

Vi får gitt at den samme sylinderen nå ruller uten å gli oppover et skråplan, til den stopper opp og ruller nedover igjen, som illustrert under:



Vurderer påstandene:

Påstand: Friksjonskraften fra underlaget på sylinderen er under hele bevegelsen større enn tyngdekraften på sylinderen. **Feil**: sylinderen har hele tiden akselerasjon nedover skråplanet (farten **øker** hele tiden i nedoverretningen), dvs. tyngdekomponenten $mg\sin\theta > f_s$.

Påstand: Sylinderens akselerasjon er null i punktet der den snur. **Feil**: Konstant kraftsum gir konstant akselerasjon (farten er riktig nok 0 i det høyeste punktet).

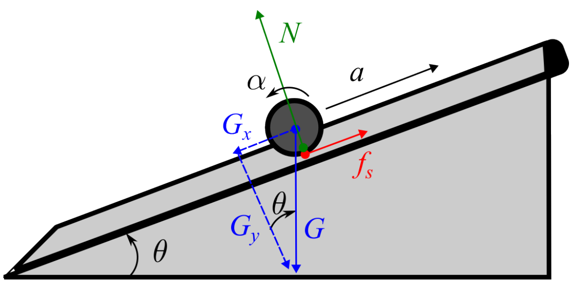
Påstand: Friksjonskraften fra underlaget på sylinderen endrer retning i løpet av bevegelsen. **Feil**: friksjonskrafta virker hele tiden oppover skråplanet. Vinkelakselerasjonen har hele tiden retning som antydet på figuren (vinkelfarten øker hele tiden i retning mot klokka), og vinkelakselerasjonen α besørges av hvilefriksjonen f_s, som har et konstant dreiemoment om massesenteret.

Påstand: Friksjonskraften fra underlaget på sylinderen har retning oppover langs skråplanet under hele bevegelsen. **Riktig**: Se over.

Påstand: Sylinderens akselerasjon endrer fortegn i punktet der den snur. **Feil**: Kraftsummen på sylinderen langs skråplanet er konstant; $\sum F = mg\sin\theta - f_s$, så akselerasjonen kan ikke endre verdi eller retning.

Oppgave 17

Figuren viser kreftene som virker på sylindren mens den roterer "på stedet hvil" mens båndet på tredemølla akselererer: tyngden G, normalkrafta N og hvilefriksjonen f_s.



Ettersom sylinderen roterer “på stedet hvil”, dvs. massesenteret er i ro, gir Newtons 1. lov at

$$\begin{aligned} G_x &= f_s \\ mg\sin\theta &= f_s \end{aligned}$$

I tillegg gir Newtons 2. lov for rotasjon om massesenteret at

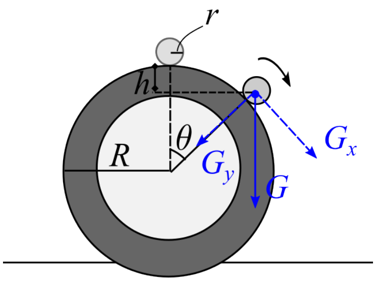
$$\begin{aligned} \sum \tau &= I_0\alpha \\ f_s r &= I_0\alpha \\ f_s r &= \frac{1}{2}mr^2\alpha \\ f_s r &= \frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{a}{r} && \text{(Rullebetingelsen: } a=\alpha r) \\ f_s &= \frac{1}{2}ma \end{aligned}$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} mg\sin\theta &= f_s \\ mg\sin\theta &= \frac{1}{2}ma \\ a &= \underline{\underline{2g\sin\theta}} \end{aligned}$$

Oppgave 18

Figuren under viser kreftene som virker på sylindren mens den ruller ned det sylinderformede røret: tyngden G og normalkraften N. I punktet der sylinderen mister kontakten med underlaget og faller av, er normalkraften $N = 0$.



Her angir x tangentiell retning og y er radiell retning. Newtons 2. lov i punktet der sylinderen faller av (sentripetalakselerasjon; betrakter sylinderen som et punktlegeme i denne sammenhengen):

$$\sum F_y = ma_y = m\frac{v^2}{R}$$

Fra figuren er

$$\sum F_y = G_y = mg\cos\theta$$

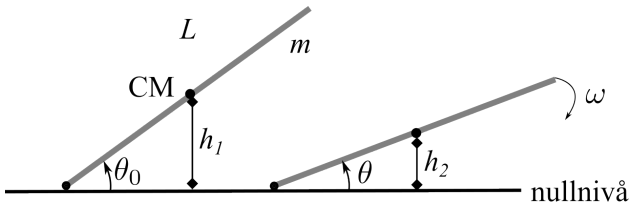
I tillegg gir energibevaring, med nullnivå satt i punktet der legemet faller av:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 \\ mg\left(R - R\cos\theta\right) &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 && \text{(Høydforskjell } h \text{ fra figur)} \\ mg\left(R - R\cos\theta\right) &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 && \text{(Rullebetingelse: } v=\omega r) \\ gR\left(1-\cos\theta\right) &= \frac{3}{4}v^2 \\ v^2 &= \underline{\frac{4}{3}gR\left(1-\cos\theta\right)} \end{aligned}$$

Setter inn i uttrykk for sentripetalkraft/-akselerasjon:

$$\begin{aligned}
\sum F_y &= m\frac{v^2}{R} \\
mg\cos\theta &= m\frac{\frac{4}{3}gR\,(1-\cos\theta)}{R} \\
\cos\theta &= \frac{4}{3}\,(1-\cos\theta) && \text{(Forkorter } m, g \text{ og } R\text{)} \\
\frac{7}{3}\cos\theta &= \frac{4}{3} \\
\cos\theta &= \frac{4}{7} \\
\theta &= \arccos\frac{4}{7} \\
&= 55,2^\circ \\
&\approx \underline{\underline{55^\circ}}
\end{aligned}$$

Oppgave 19



Bruker bevaring av mekanisk energi for stanga: potensiell energi for massesenteret går over til kinetisk rotasjonsenergi:

$$mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

der $I = \frac{1}{3}mL^2$ er stangas treghetsmoment om rotasjonsaksen om enden av stanga. Dette gir (massesenteret ligger midt på stanga):

$$\begin{aligned}
mg\frac{L}{2}\sin\theta_0 &= mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}I\omega^2 \\
mg\frac{L}{2}\sin\theta_0 &= mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\cdot\omega^2 \\
g\sin\theta_0 &= g\sin\theta + \frac{1}{3}L\cdot\omega^2 && \text{(Forkorter)} \\
\omega &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{3g}{L}\,(\sin\theta_0-\sin\theta)}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 20

I et stjerneskjelv endrer nøytronstjernas radius seg plutselig, mens $\sum\tau = 0$, slik at dreieimpuls (som her tilsvarer spinn) er bevart.

La $I_0 = \frac{2}{5}mr_0^2$ og $I = \frac{2}{5}mr^2$ være treghetsmomentet hhv. før og etter et stjerneskjelvet der radius endrer seg fra hhv. r_0 og r. La ω_0 og ω være vinkelfarten hhv. før og etter endringen. med tilhørende perioder hhv. T_0 og T. Bevaring av dreieimpuls gir

$$\begin{aligned}
I_0\omega_0 &= I\omega \\
I_0\cdot\frac{2\pi}{T_0} &= I\cdot\frac{2\pi}{T} \\
T &= \frac{I}{I_0}T_0
\end{aligned}$$

Den prosentvise endringen i periode blir

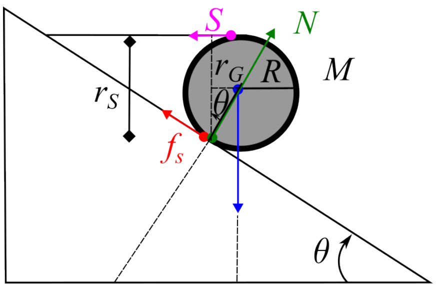
$$\begin{aligned}\frac{T-T_0}{T_0} &= \left(\frac{I}{I_0}-1\right)\frac{T_0}{T_0} \\ &= \frac{\frac{2}{5}mr^2}{\frac{2}{5}mr_0^2}-1 \\ &= \underline{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2-1}\end{aligned}$$

Dersom radius endrer seg 0,10 %, dvs. $r = \pm 1,001 r_0$, gir blir prosentvis endring i periode lik

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2-1 &= 1,001^2-1 \\ &= 2,0\cdot 10^{-3} \\ &= \underline{\underline{0,20\,\%}}\end{aligned}$$

Oppgave 21

Figuren under viser kreftene som virker på sylinderen når den ligger i ro på skråplanet: tyngden G, normalkraften N, hvilefriksjonen f_s og snordraget S.



Skråplanets helningsvinkel θ finnes igjen som vinkelen mellom linjene r_S(momentarma til S) og r_G (momentarm for G).

Ettersom sylinderen ligger i ro, er $\sum\tau = 0$ om et hvilket som helst punkt. Hvis vi velger kontaktpunktet med bakken som momentakse, gir denne betingelsen (N og f_s virker gjennom aksen, og bidrar ikke til dreiemomentet):

$$\begin{aligned}\sum\tau &= 0 \\ S\cdot r_S - G\cdot r_G &= 0 \\ S &= \frac{r_G}{r_S}\cdot G \\ &= \frac{R\sin\theta}{R+R\cos\theta}\cdot Mg \\ &= \underline{\underline{\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot Mg}}\end{aligned}$$

Oppgave 22

Kvalitativt resonnement: Svingetiden til en pendel øker med økende avstand mellom massesenteret og svingeaksen. For tre pendler A, B og C med lengder hhv. L, $2L$ og $3L$ vil derfor svingetidene oppfylle

$$T_C > T_B > T_A.$$

Detaljert resonnement: Svingetiden til en fysisk pendel med masse M er for små utslag gitt ved

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}},$$

der h er avstanden mellom massesenteret og svingeaksen. For en pendel bestående av en tynn stang med lengde l er $I = \frac{1}{3}Ml^2$, og $h = \frac{1}{2}l$ (massesenteret midt på stanga), dvs.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}Ml^2}{Mg\cdot\frac{1}{2}l}} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}}$$

Dvs. $T \sim \sqrt{l}$, og svingetidene til de tre pendlene vil oppfylle

$$T_C > T_B > T_A.$$

Oppgave 23

Sylinderens totale mekaniske energi er (med nullnivå for pot. energi i det laveste punktet)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 + mg\left(R-r\right)\left(1-\cos\theta\right)$$

Ut i fra rullebetingelsen er $v = \omega r$. Dessuten er massesenterets vinkelfart $\dot{\theta}$ i forhold til sentrum av den sirkelformede skåla gitt ved[2] $v = \left(R-r\right)\dot{\theta}$, slik at $\omega = \frac{v}{r} = \frac{R-r}{r}\dot{\theta}$. Det gir:

$$E = \frac{1}{2}m\left(R-r\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_0\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}^2 + mg\left(R-r\right)\left(1-\cos\theta\right)$$

Bevaring av mekanisk energi betyr at

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= 0\\
\frac{1}{2}m\left(R-r\right)^2\cdot 2\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} + \frac{1}{2}I_0\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\cdot 2\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} + mg\left(R-r\right)\left(-\left(-\sin\theta\right)\cdot\dot{\theta}\right) &= 0\\
\frac{1}{2}m\left(R-r\right)^2\cdot 2\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} + \frac{1}{2}I_0\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\cdot 2\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} + mg\left(R-r\right)\sin\theta\cdot\dot{\theta} &= 0\\
\frac{1}{2}m\left(R-r\right)^2\cdot 2\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\cdot 2\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} + mg\left(R-r\right)\sin\theta\cdot\dot{\theta} &= 0\\
\left(R-r\right)\cdot\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\left(R-r\right)\cdot\ddot{\theta} + g\sin\theta &= 0 \qquad \text{(Forkorter)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\left(R-r\right)\ddot{\theta} &= -g\sin\theta\\
\ddot{\theta} &= -\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin\theta\\
\ddot{\theta} &\approx -\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\cdot\theta \qquad \text{(Her er } \sin\theta\approx\theta\text{)}
\end{aligned}$$

Sammenholdt med likningen for harmonisk oscillator;

$$\ddot{x} = -\omega_0^2\cdot x,$$

ser vi at vinkelfrekvensen for svingningene ved små utslag er

$$\omega_0 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}}}}$$

[2] På formelarket er sammenhengen mellom bane- og vinkelfart oppgitt som $v = \omega R$; dvs. banefart er lik vinkelfart ganger avstand fra rotasjonsakse. I dette tilfellet tilsvarer dette $v = \dot{\theta}\left(R-r\right)$

Oppgave 24

Utslaget for et svakt dempet svingesystem er gitt ved

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi),$$

der faktoren $A(t) = Ae^{-\gamma t}$ utgjør en eksponentielt avtakende amplitude.

Den total mekaniske energien for systemet i startøyeblikket er $E_0 = \frac{1}{2}kA^2$, ettersom all energi da finnes i form av potensiell energi i fjæra.

Etter én periode, dvs. ved $t = T$, er amplituden lik $A(T) = Ae^{-\gamma T}$, og mekanisk energi er

$$E = \frac{1}{2}k(A(T))^2 = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma T}.$$

Prosentvis tap i løpet av den første perioden blir da

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E}{E_0} &= \frac{E(t=0) - E(t=T)}{E(t=0)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}kA^2\left(1 - e^{-2\gamma T}\right)}{\frac{1}{2}kA^2} \\ &= \underline{1 - e^{-2\gamma T}}\end{aligned}$$

(Kvasi-)perioden T er

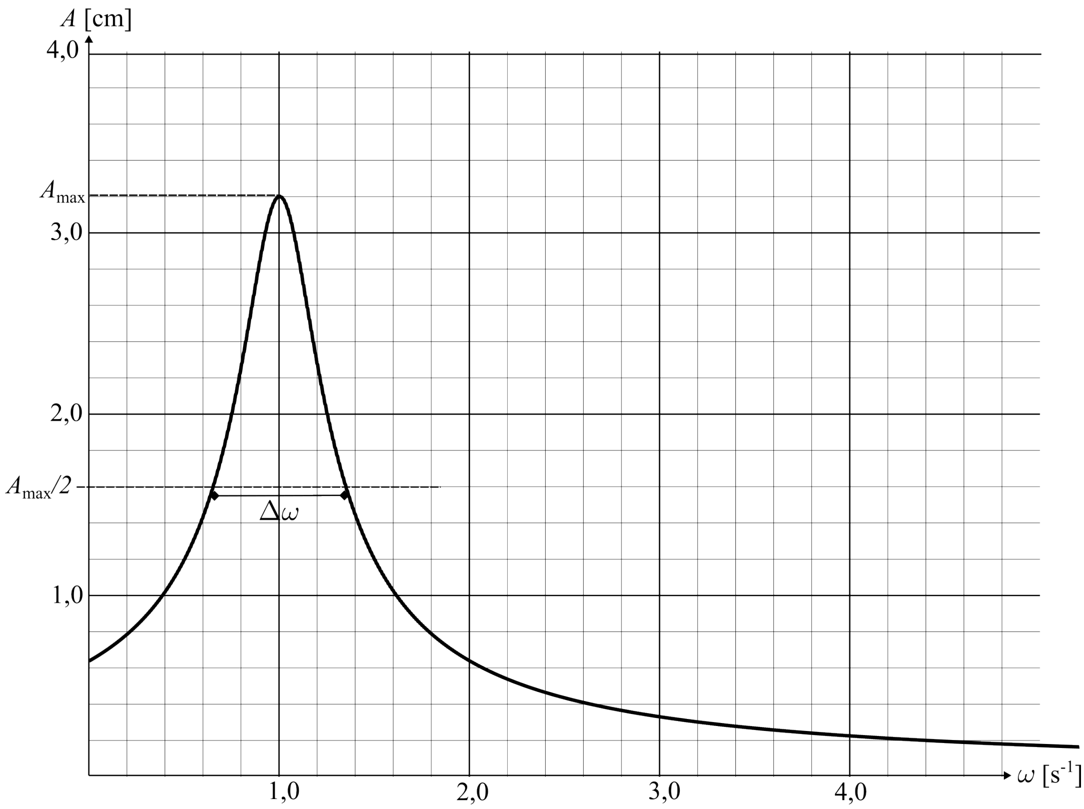
$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{10}\omega_0\right)^2}} \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0}\cdot 1{,}005 \\ &\approx \underline{\frac{2\pi}{\omega_0}}\end{aligned}$$

Prosentandelen mistet mekanisk energi blir da

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E}{E_0} &= 1 - e^{-2\gamma T} \\ &= 1 - e^{-2\cdot\frac{1}{10}\omega_0\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}} \\ &= 1 - e^{-\frac{4\pi}{10}} \\ &= 0{,}715 \\ &\approx \underline{\underline{72\,\%}}\end{aligned}$$

Oppgave 25

Figuren under viser resonanskurven med avlest resonansfrekvens og halvverdibredde:

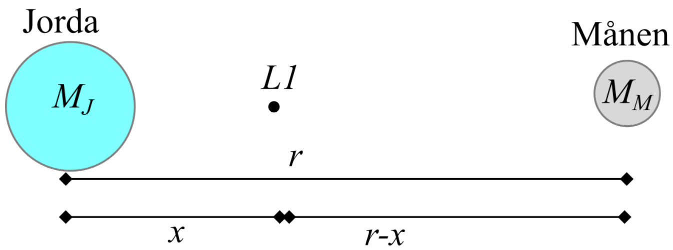


Svingesystemets Q-faktor er gitt ved $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$. Vi leser av resonansfrekvensen $\omega_0 \approx 1,0\,\mathrm{s}^{-1}$ og halvverdibredden $\Delta\omega \approx 0,8\,\mathrm{s}^{-1}$,slik at Q-verdien blir omtrent

$$
\begin{aligned}
Q &\approx \frac{1,0\,\mathrm{s}^{-1}}{0,8\,\mathrm{s}^{-1}} \\
&\approx \underline{\underline{1}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 26

Figuren under viser Lagrangepunktet L1 mellom Jorda og Månen, dvs. et punkt der netto gravitasjonskraft på et legeme i punktet er null:



Ut i fra størrelsene gitt på figuren, gir betingelsen om null netto gravitasjonskraft på en punktmasse m i L1 at

$$
\begin{aligned}
\frac{GM_J m}{x^2} &= \frac{GM_M m}{(r-x)^2} \\
\left(\frac{r-x}{x}\right)^2 &= \frac{M_M}{M_J} \\
\frac{r-x}{x} &= \sqrt{\frac{M_M}{M_J}} \\
r-x &= x \cdot \sqrt{\frac{M_M}{M_J}} \\
x\left(\sqrt{\frac{M_M}{M_J}}+1\right) &= r \\
x &= \frac{1}{\sqrt{\frac{M_M}{M_J}}+1} r \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{81}}+1} r \qquad \text{(Oppgitt: } M_J/M_M = 81) \\
&= \underline{\underline{\frac{9}{10} r}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 27

Det er tyngdekraften fra planeten som besørger sentripetalkraften som opprettholder sirkelbevegelsen til en punktmasse på ekvator. Se figuren under.

Uttrykt ved rundetid/periode T, er banefarten

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

slik at Newtons 2. lov gir i grensetilfellet at normalkrafta $N = 0$, der man har minste mulige periode T_{min}:

$$
\begin{aligned}
\sum F = ma = m\frac{v^2}{R} &= m \cdot \frac{4\pi^2 R}{T_{\text{min}}^2} \\
\frac{GMm}{R^2} &= m\frac{4\pi^2 R}{T_{\text{min}}^2} \\
T_{\text{min}} &= \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}
\end{aligned}
$$

Ettersom planeten har konstant massetetthet ρ er

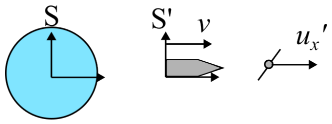
$$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,$$

som gir

$$
\begin{aligned}
T_{\text{min}} &= \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}} \\
&= \underline{\underline{\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 28

Figuren under viser situasjonen; vi skal bestemme farten u_x til satellitten i forhold til Jorda (system S) når satellitten har farten $u'_x = 0,10c$ i forhold til romskipet (system S'), og romskipet har farten $v = 0,90c$ i forhold til Jorda.

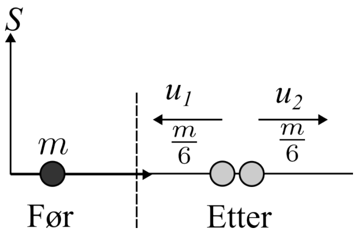


Relativistisk fartsaddisjon gir:

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \\
&= \frac{0,10c + 0,90c}{1 + \frac{0,10c \cdot 0,90c}{c^2}} \\
&= 0,917c \\
&\approx \underline{\underline{0,92c}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 29

Når partikkelen spaltes, får de to delene hastigheter u_1 og u_2 i forhold labsystemet S. Se figuren under.



Vi finner hastighetene u_1 og u_2 fra bevaring av (relativistisk) bevegelsesmengde. Ettersom de to partiklene i sluttilstanden har samme masse, får de hastigheter med samme absoluttverdi, og motsatt retning:

$$u_1 = -u_2 = u.$$

Bevaring av total energi (partikkel er i ro før spaltingen, og har kun hvileenergi mc^2):

$$
\begin{aligned}
mc^2 &= 2 \cdot \gamma_u \cdot \frac{m}{6} c^2 \\
\gamma_u &= 3 \\
u &= c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_u^2}} \\
&= c\sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} \\
&= c\sqrt{\frac{8}{9}} \\
&= 0,943c \\
&\approx \underline{\underline{0,94c}}
\end{aligned}
$$