NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

EKSAMEN
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Tirsdag 31. mai 2005 kl. 0900 - 1300
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (eller tilsvarende).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller B. E. Lian og C. Angell: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (HP30S eller lignende.)

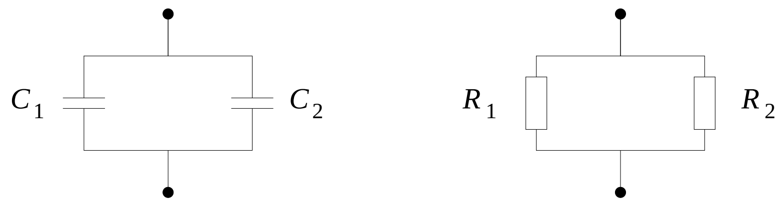
Side 2 - 5: Oppgave 1 - 5.
Vedlegg 1 - 3: Formelsamling.

Prøven består av i alt 10 deloppgaver (1a, 1b, 1c, 2, 3a, 3b, 3c, 4, 5a, 5b). Hver av disse 10 deloppgavene vil bli gitt like stor vekt under bedømmelsen. Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer. Enhetsvektorer er angitt med hatt over symbolet. Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er luft (vakuum), med permittivitet $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. I oppgaver hvor tallverdier er oppgitt for alle nødvendige størrelser, skal tallsvar bestemmes. I oppgaver der det ikke er bedt uttrykkelig om utledninger eller bevis, kan formler og resultater som er utledet i læreboka, forelesningene eller regneøvingene benyttes uten utledning, dersom du husker dem. Dette gjelder f.eks. oppgavene 1b, 1c og 2.

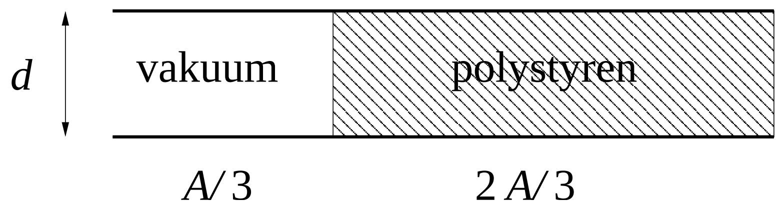
Sensuren kan ventes senest 21. juni.

OPPGAVE 1

a) Utled sammenhengene $C = C_1 + C_2$ og $R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$ for parallellkobling av henholdsvis to kapasitanser C_1 og C_2 og to motstander R_1 og R_2.



b) Bestem kapasitansen til en parallellplatekondensator der volumet mellom platene er 2/3 fylt med plastmaterialet polystyren (et dielektrikum), som vist i figuren:



Platene har areal $A = 10$ cm^2 og innbyrdes avstand $d = 1$ mm. Polystyren har relativ permittivitet $\varepsilon_r = 2.5$. Oppgi svaret i enheten pF. (1 pF $= 10^{-12}$ F)

c) Polystyren har elektrisk ledningsevne $\sigma = 10^{-15}\ \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$ og er dermed ikke en perfekt isolator. Anta at platene i kondensatoren i oppgave *b* har ladning Q_0 og $-Q_0$ ved tidspunktet $t = 0$. Hvor lang tid tar det før 99% av denne ladningen har "lekket" mellom de to platene? Oppgi svaret i hele timer.

Noe av dette kan du få bruk for:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

$$C = Q/\Delta V$$

$$I = \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$I = dQ/dt$$

$$\Delta V = RI$$

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = Q_{\mathrm{fri}}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

OPPGAVE 2

En sylinderformet spole har lengde $l = 50$ cm, radius $r_0 = 1.0$ cm og i alt 800 viklinger. Spolen er fylt med et magnetiserbart materiale med relativ permeabilitet $\mu_r = 400$. Bestem den magnetiske feltstyrken B inne i spolen når strømstyrken i spoletråden er 1 A. Finn også spolens selvinduktans L.
Hint: Spolen kan betraktes som tilnærmet uendelig lang. Det er ikke nødvendig å *utlede* uttrykket for B.

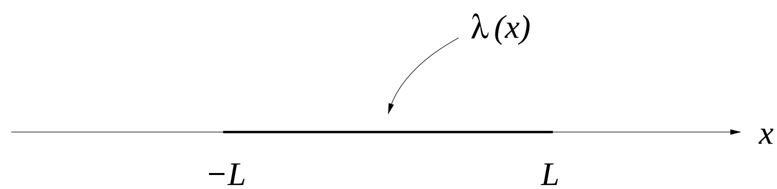
Oppgitt:

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H}$$

$$\phi = LI$$

OPPGAVE 3



En tynn stav med lengde $2L$ ligger på x-aksen mellom $x = -L$ og $x = L$. Stavens ladning pr lengdeenhet er

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L}$$

der λ_0 er en konstant.

a) Bestem stavens totale ladning Q. Bestem også stavens elektriske dipolmoment $\boldsymbol{p}$.
Hint: Ladning på en lengde dx er $dq = \lambda(x)\, dx$. Dipolmoment for et "ladningspar" $\pm dq$ i posisjon $\pm x$ er $d\boldsymbol{p} = 2x\, dq\, \hat{x}$.

b) Staven resulterer i et elektrisk potensial (utenfor selve staven) på x-aksen som kan uttrykkes ved den dimensjonsløse størrelsen $\alpha = L/x$ (vi antar $x > L$, dvs $0 < \alpha < 1$):

$$V(\alpha) = \beta \left[\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 2 \right]$$

Vis dette og fastlegg derved konstanten β. (Vi setter $V = 0$ uendelig langt borte.)

c) Langt unna staven, dvs for $x \gg L$, evt. $\alpha \ll 1$, kan vi med god tilnærmelse (dvs "til ledende orden") uttrykke potensialet på x-aksen slik:

$$V(x) \simeq \frac{\gamma}{x^n}$$

Vis dette og fastlegg derved konstanten γ og (den heltallige) eksponenten n. [Uttrykk γ ved hjelp av β dersom du ikke har greid å bestemme β. Hvis du har problemer med regningen: Har du noen formening om hva n kan være når V er potensialet i stor avstand fra en elektrisk dipol?]

Oppgitt:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(Coulombpotensialet)}$$

$$\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 \ldots$$

$$\int \frac{x\,dx}{a-x} = -x - a\,\ln|a-x|$$

OPPGAVE 4

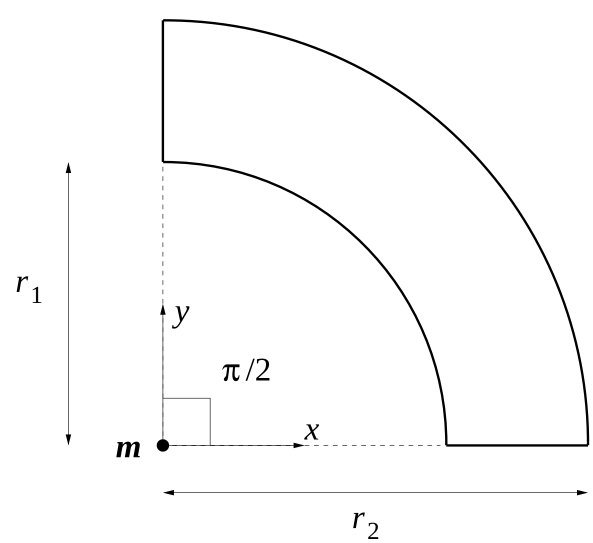
En liten strømførende spole kan (dersom vi ikke er for nær spolen) betraktes som en punktformet magnetisk dipol $\boldsymbol{m}$. Vi plasserer spolen i origo og orienterer den slik at $\boldsymbol{m}$ peker langs z-aksen. Magnetfeltet i xy-planet er da gitt ved

$$\boldsymbol{B}(r) = -\frac{\mu_0 \boldsymbol{m}}{4\pi r^3}$$

hvor $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Spolen fører en strøm som varierer harmonisk med tiden, med vinkelfrekvens ω. Dermed kan vi skrive

$$\boldsymbol{m}(t) = (m_0 \cos \omega t)\,\hat{z}$$

Ei ledersløyfe er plassert i xy-planet:



Ledersløyfa består av to kvartsirkler, den ene med radius $r_1 = 20$ cm, den andre med radius $r_2 = 30$ cm, og begge med sentrum i origo. De to kvartsirklene er forbundet med rette biter (lengde 10 cm) slik at lederen danner ei lukket sløyfe som vist i figuren.
Bestem indusert elektromotorisk spenning $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ i ledersløyfa når $m_0 = 10$ Am^2 og $\omega = 10^4$ s^{-1}. Oppgi amplituden $\mathcal{E}_0$ i enheten mV.

Oppgitt:

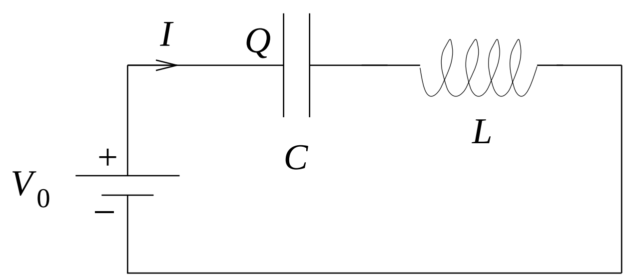
$$\mathcal{E} = -d\phi/dt$$

$$\phi = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

OPPGAVE 5

a) En spenningskilde V_0 kobles ved tidspunktet $t = 0$ til en seriekobling av en induktans L og en kapasitans C:



Bruk av Kirchhoffs spenningsregel resulterer i en andre ordens differensialligning for ladningen Q på kondensatoren, med generell løsning

$$Q(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t$$

Startbetingelsene (dvs ved $t = 0$) for ladningen Q og strømmen $I = dQ/dt$ er $Q(0) = I(0) = 0$. Bruk disse opplysningene til å bestemme vinkelfrekvensen ω, samt å fastlegge de tre konstantene a_0, a_1 og a_2.

b) Finn også $I(t)$ for $t \geq 0$. Skisser en periode av $Q(t)$ og $I(t)$, dvs mellom $t = 0$ og $t = 2\pi/\omega$. Hittil har vi antatt at kretsen ovenfor har null motstand, men i praksis er dette ikke tilfellet. Hva blir Q og I lenge etter at spenningskilden ble koblet inn ($t \to \infty$) når vi tar hensyn til at kretsen har en viss motstand R? (Her skal det ikke være nødvendig med noe regning.)

Oppgitt:
Spenningsfall over induktans: $L \, dI/dt$.

Formelsamling

$\int d\boldsymbol{A}$ angir flateintegral og $\int d\boldsymbol{l}$ angir linjeintegral. $\oint$ angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

Elektrostatikk

- Coulombs lov:
$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$
- Elektrisk felt og potensial:
$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$
$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$
- Elektrisk potensial fra punktladning:
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
- Elektrisk fluks:
$$\phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$
- Gauss lov for elektrisk felt:
$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$
$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{fri}}$$
- Elektrostatisk felt er konservativt:
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$
- Elektrisk forskyvning:
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$
- Elektrisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$

- Kapasitans:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi_m = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss' lov for magnetfeltet:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

- Ampères lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- $\boldsymbol{H}$-feltet:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_r \mu_0}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Magnetisering = magnetisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta V}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faraday (–Henry)s lov:

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

- Ampère–Maxwells lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi_m}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2} \ \ , \ \ M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1} \ \ , \ \ M_{12} = M_{21} = M$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$