NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

EKSAMEN
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME I
Mandag 5. desember 2005 kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (eller tilsvarende).
- O. Øgrim og B. E. Lian eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (HP30S eller lignende.)

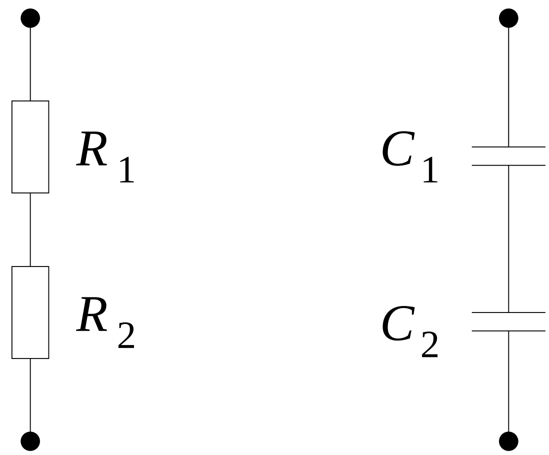
Side 2 - 6: Oppgave 1 - 4.
Vedlegg 1 - 3: Formelsamling.

Prøven består av i alt 10 deloppgaver (1a, 1b, 1c, 1d, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 4). Hver av disse 10 deloppgavene vil bli gitt like stor vekt under bedømmelsen. Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer. Enhetsvektorer er angitt med hatt over symbolet. Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er luft (vakuum), med permittivitet $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. I oppgaver hvor tallverdier er oppgitt for alle nødvendige størrelser, skal tallsvar bestemmes.

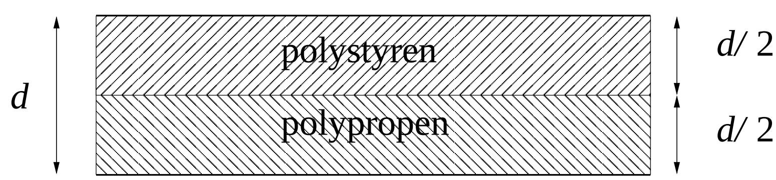
Sensuren kan ventes før jul.

OPPGAVE 1

a) Utled sammenhengene $R = R_1 + R_2$ og $C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$ for seriekobling av henholdsvis to motstander R_1 og R_2 og to kapasitanser C_1 og C_2.



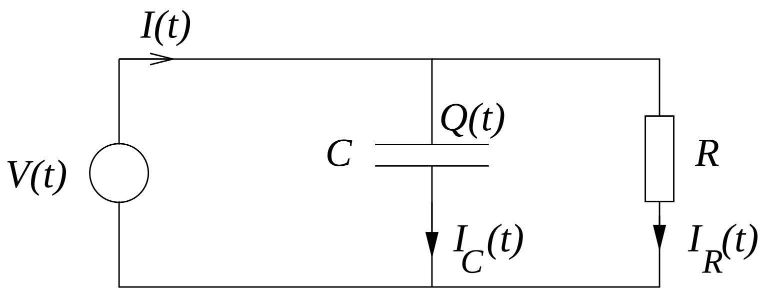
b) Bestem kapasitansen til en parallellplatekondensator der volumet mellom platene er 1/2 fylt med plastmaterialet polystyren og 1/2 fylt med plastmaterialet polypropen (begge dielektrika), som vist i figuren:



Platene har areal $A = 25$ cm^2 og innbyrdes avstand $d = 2$ mm. Polystyren har relativ permittivitet $\varepsilon_{r1} = 2.5$, polypropen har relativ permittivitet $\varepsilon_{r2} = 3.0$. Oppgi gjerne svaret i enheten pF. (1 pF $= 10^{-12}$ F)

c) I en ideell kondensator har mediet mellom metallplatene null elektrisk ledningsevne, slik at kondensatorens indre motstand blir uendelig stor. Kondensatoren i *b* er ikke ideell, i og med at polystyren har elektrisk ledningsevne $\sigma_1 = 10^{-15}\ \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$ og polypropen har elektrisk ledningsevne $\sigma_2 = 10^{-14}\ \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$. Bestem den indre motstanden i kondensatoren.

d) En slik *reell* kondensator kan betraktes som en *ideell* kapasitans C koblet i parallell med en motstand R:



En tidsavhengig spenningskilde

$$V(t) = V_0 \frac{\sigma t}{1 + \sigma t}$$

skrus på ved tiden $t = 0$. Her er σ en konstant med dimensjon s^{-1}. Bruk Kirchhoffs regler for strøm og spenning til å bestemme et uttrykk for total strøm $I(t)$ (se figuren). Hva blir I umiddelbart etter at spenningskilden er skrudd på? Og hva blir I lenge etter at spenningskilden er skrudd på? Vurder om resultatene virker rimelige.

Noe av dette kan du få bruk for i oppgave 1:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

$$C = Q/\Delta V$$

$$I = \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A}$$

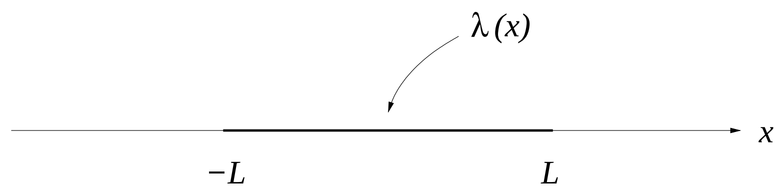
$$I = dQ/dt$$

$$\Delta V = RI$$

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = Q_{\mathrm{fri}}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

OPPGAVE 2



En tynn stav med lengde $2L$ ligger på x-aksen mellom $x = -L$ og $x = L$. Stavens ladning pr lengdeenhet er

$$\lambda(x) = \lambda_0 \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{3} \right)$$

der λ_0 er en konstant.

a) Bestem stavens totale ladning Q. Bestem også stavens elektriske dipolmoment $\boldsymbol{p}$.
Hint: Ladning på en lengde dx er $dq = \lambda(x)\, dx$. Bidraget til elektrisk dipolmoment fra en ladning dq i posisjon x er $d\boldsymbol{p} = x\, dq\, \hat{x}$.

b) Vis at det elektriske potensialet på x-aksen (utenfor selve staven, og vi antar $x > L$) kan uttrykkes på formen

$$V(\alpha) = \beta \left(\frac{3 - \alpha^2}{3\alpha^2} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{2}{\alpha} \right)$$

der $\alpha = L/x$. Hva er konstanten β? (Vi setter $V = 0$ uendelig langt borte.)

c) Langt unna staven, dvs for $x \gg L$ (evt. $\alpha \ll 1$), kan vi med god tilnærmelse (dvs "til ledende orden") uttrykke potensialet på x-aksen slik:

$$V(x) \simeq \frac{\gamma}{x^3}$$

Vis dette og fastlegg derved konstanten γ. [Uttrykk gjerne γ ved hjelp av β dersom du ikke har greid å bestemme β i oppgave *b*.]

Oppgitt:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(Coulombpotensialet)}$$

$$\ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = 2\alpha + \frac{2}{3}\alpha^3 + \frac{2}{5}\alpha^5 \ldots$$

$$\int \frac{u^2\, du}{a-u} = -a^2 \ln |a-u| - \frac{1}{2}u^2 - au$$

$$\int \frac{du}{a-u} = -\ln |a-u|$$

OPPGAVE 3

a) En (tynn) rett leder fører strøm I og har lengde $2L$. Et punkt P ligger i avstand R fra lederen. Det er like stor avstand fra P til lederens to endepunkter. Magnetfeltet i P fra den rette lederen er bestemt av Biot–Savarts lov,

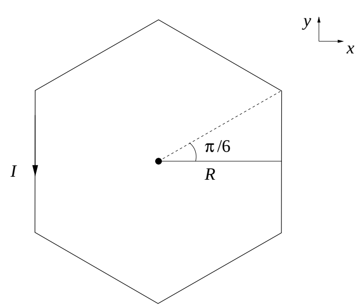
$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\, d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\, d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

Tegn en figur, som inneholder lederen og punktet P, der du tydelig angir størrelsene $I\, d\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{B}$, samt R og $2L$. Husk å angi *retning* på de tre vektorene.
Det oppgis at feltstyrken $B = |\boldsymbol{B}|$ i punktet P er

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R\sqrt{1 + R^2/L^2}}$$

Vis hvordan du kommer fram til dette resultatet, med utgangspunkt i Biot–Savarts lov.

b) Bestem magnetfeltet $\boldsymbol{B}_n$ i sentrum av en strømførende regulær n-kant ($n = 3, 4, \ldots$) der avstanden fra sentrum til hver av de n sidekantene er R. n-kanten ligger i xy-planet, med sentrum i origo. Et eksempel, med $n = 6$, er vist i figuren nedenfor:



(Hint: Ta utgangspunkt i uttrykket for B oppgitt i oppgave *a*.)

Vis at

$$B_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\mu_0 I}{2R}$$

som er magnetisk feltstyrke i sentrum av en sirkulær strømførende leder med radius R.

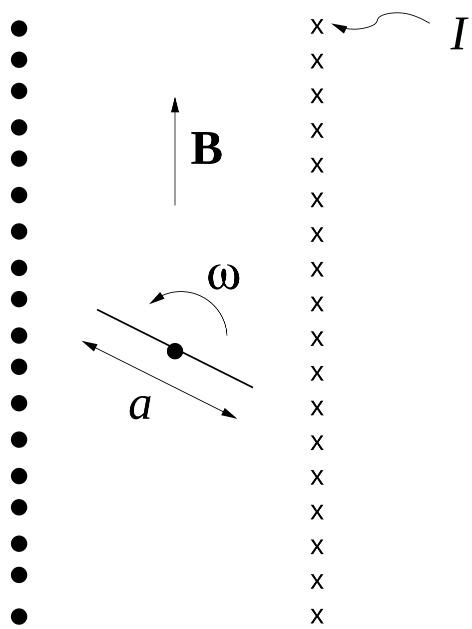
Oppgitt:

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{3/2}} = \frac{ax + b}{(ac - b^2)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\tan x \simeq x \quad \text{når} \ \ |x| \ll 1$$

OPPGAVE 4

Ei kvadratisk ledersløyfe med sidekanter a roterer med vinkelfrekvens ω inne i en lang, luftfylt, tettviklet spole med n viklinger pr lengdeenhet. Spoletråden fører en konstant strøm I. Ledersløyfa roterer omkring en akse som står vinkelrett på spolens lengderetning:



I figuren ser vi et snitt gjennom sentrum av spolen, der $\times$ angir strøm inn i planet og $\bullet$ angir strøm ut av planet. Inne i spolen ser vi den ene sidekanten av den roterende ledersløyfa.

Bestem amplituden til den elektromotoriske spenningen $\mathcal{E}(t)$ som induseres i den kvadratiske ledersløyfa.

Tips: Magnetfeltet inne i spolen kan bestemmes ved hjelp av Amperes lov. Hvis du husker uttrykket for magnetfeltet inne i spolen, trenger du ikke å utlede det. Hvis du ikke klarer å bestemme B, kan du uttrykke amplituden til $\mathcal{E}(t)$ ved hjelp av B.

Formelsamling

$\int d\boldsymbol{A}$ angir flateintegral og $\int d\boldsymbol{l}$ angir linjeintegral. $\oint$ angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

Elektrostatikk

- Coulombs lov:
$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$
- Elektrisk felt og potensial:
$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$
$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$
- Elektrisk potensial fra punktladning:
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
- Elektrisk fluks:
$$\phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$
- Gauss lov for elektrisk felt:
$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$
$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{fri}}$$
- Elektrostatisk felt er konservativt:
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$
- Elektrisk forskyvning:
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E}$$
- Elektrisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$

- Kapasitans:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi_m = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss' lov for magnetfeltet:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

- Ampères lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- $\boldsymbol{H}$-feltet:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_r \mu_0}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Magnetisering = magnetisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta V}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faraday (–Henry)s lov:

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

- Ampère–Maxwells lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi_m}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2} \;\; , \;\; M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1} \;\; , \;\; M_{12} = M_{21} = M$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$