NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
Mandag 4. desember 2006 kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (eller tilsvarende).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller B. E. Lian og C. Angell: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (HP30S eller lignende.)

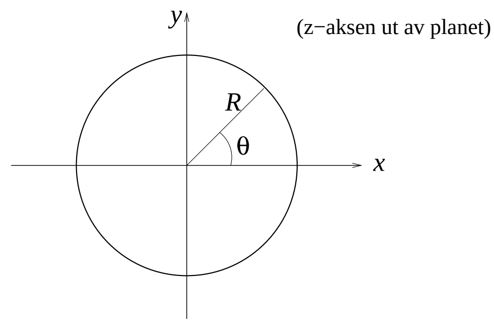
Side 2 - 5: Oppgave 1 - 4.
Vedlegg 1 - 3: Formelsamling.

Prøven består av i alt 10 deloppgaver (1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c). Hver av disse 10 deloppgavene vil trolig bli tillagt like stor vekt under bedømmelsen. Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer. Enhetsvektorer er angitt med hatt over symbolet. Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er luft (vakuum), med permittivitet $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. I oppgaver hvor tallverdier er oppgitt for alle nødvendige størrelser, skal tallsvar bestemmes.

Sensuren kan ventes senest 1. januar.

OPPGAVE 1

En tynn ring med radius R ligger i xy-planet med sentrum i origo.



Ringen har en ladning $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos\theta$ pr lengdeenhet, der θ angir vinkelen i forhold til x-aksen, som vist i figuren.

a) Bestem ringens totale ladning Q. Forklar, med utgangspunkt i symmetrisk (diagonalt) beliggende ladningselementer på ringen, $dq = \lambda\, dl = \lambda R\, d\theta$, hvorfor det elektriske feltet på z-aksen blir en vektor som peker i negativ x-retning. (Dvs: $\boldsymbol{E}(0,0,z) = -E_x(z)\,\hat{x}$, med $E_x(z) > 0$ og $\hat{x}$ = enhetsvektor i x-retning.) Tegn gjerne en figur eller to.

b) Bestem det elektriske feltet $E_x(z)$ på z-aksen.

Tips: En infinitesimal bit av ringen, $dl = R\,d\theta$, gir et bidrag $dE(\theta) = \lambda(\theta)R\,d\theta/4\pi\varepsilon_0 r^2$ til feltet i en avstand r. Her trenger du projeksjonen av dE på x-aksen, og denne bestemmes kanskje enklest i to omganger: Først projeksjonen $(dE)_{xy}$ av dE på xy-planet og deretter projeksjonen dE_x av $(dE)_{xy}$ på x-aksen.

c) Langt unna ringen, dvs for $z \gg R$, kan det elektriske feltet på z-aksen uttrykkes ved ringens elektriske dipolmoment $p = |\boldsymbol{p}| = \pi\lambda_0 R^2$ og skrives på formen

$$E_x(z) \simeq \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 z^n} \qquad (z \gg R)$$

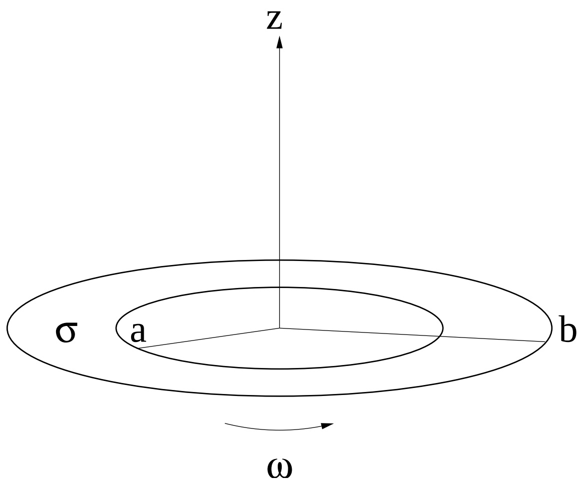
Vis dette og bestem derved (den heltallige) eksponenten n. (Uttrykket for p antas kjent og skal *ikke* utledes.)
Hvis du ikke har funnet et uttrykk for $E_x(z)$ i punkt b) som lar seg skrive på denne formen: Hva *tror du* n kan være når $E_x(z)$ er det elektriske feltet i stor avstand fra en elektrisk *dipol*?

Oppgitt:

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \text{ konst.}$$

OPPGAVE 2

Ei sirkulær skive med indre radius a og ytre radius b har ladning pr flateenhet som varierer med avstanden r fra sentrum, $\sigma(r) = \sigma_0 b^2/r^2$. Skiva ligger i xy-planet med sentrum i origo. Den roterer omkring symmetriaksen (z-aksen) med vinkelhastighet ω.



a) Bestem skivas magnetiske dipolmoment m. Tips: Finn først dipolmomentet dm til en tynn ring med radius r, tykkelse dr og strøm $dI = dq/T$.

b) Bestem magnetfeltet $B(z)$ på z-aksen. Tips: Finn først magnetfeltet dB fra en tynn ring med radius r, tykkelse dr og strøm dI.

Oppgitt:

Magnetfelt på symmetriaksen, i avstand z, fra en tynn strømførende ring, med strøm I og radius R:

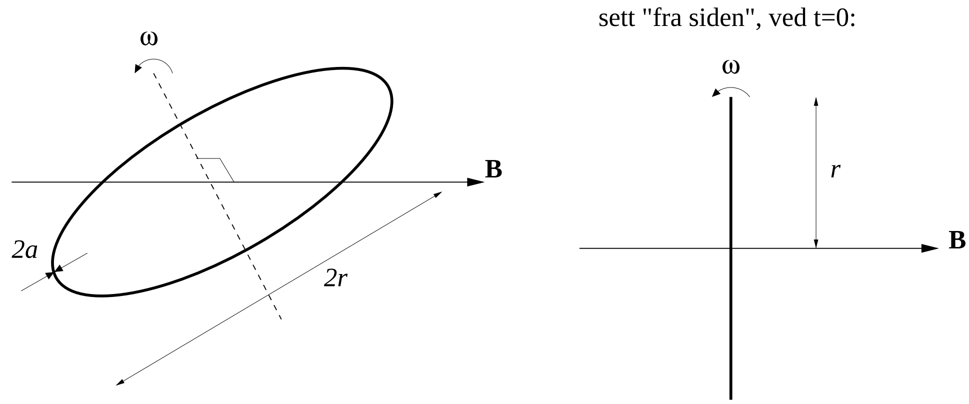
$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

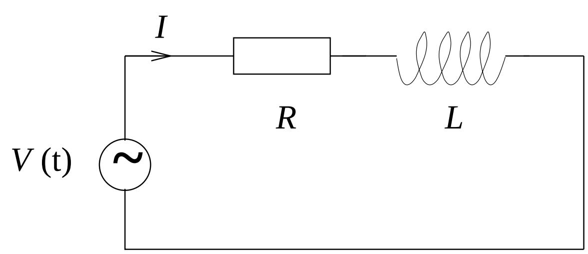
OPPGAVE 3

En metalltråd med radius a er formet som en ring med radius r. Metalltråden er tynn, dvs $a \ll r$. Ringen roterer i et uniformt magnetfelt $\boldsymbol{B}$, med konstant vinkelfrekvens ω om en akse som står normalt på $\boldsymbol{B}$, og som går gjennom ringens diameter (se figuren).



a) Den induserte elektromotoriske spenningen i ringen (som funksjon av tida t) blir på formen $V(t) = V_0 \sin \omega t$. Bestem den såkalte amplituden V_0. Anta i første omgang at vi kan neglisjere ringens selvinduktans L, og videre at vi kjenner ringens resistans R. Hva blir da den induserte strømmen i ringen, $I(t)$.

b) Metallet som ringen er laget av har elektrisk ledningsevne (konduktivitet) σ. Hva blir ringens resistans R, uttrykt ved σ, r og a?
Anta nå at ringens selvinduktans L *ikke* kan neglisjeres. Den roterende ringen kan da beskrives med følgende elektriske krets (en såkalt "RL–krets"):



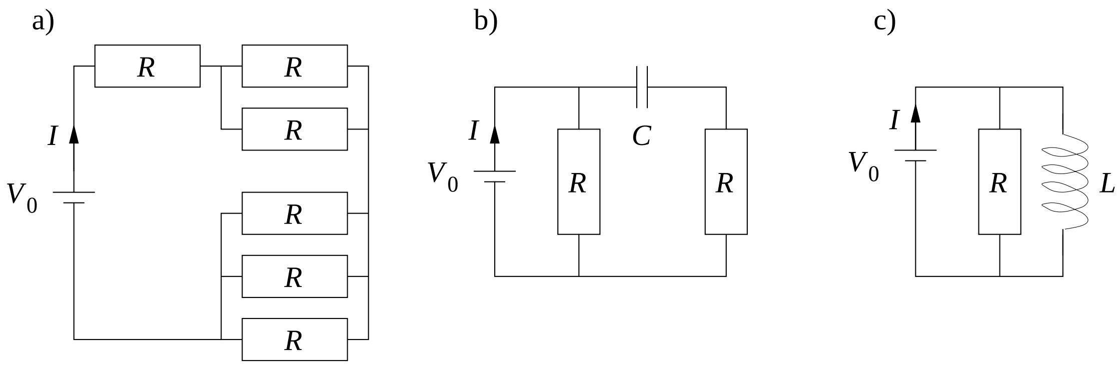
Bruk Kirchhoffs spenningsregel til å vise at differensialligningen som beskriver strømmen i kretsen (dvs: ringen) kan skrives på formen

$$\frac{dI}{dt} + \omega_0 I = \alpha_0 \sin \omega t$$

Fastlegg på den måten ringens "karakteristiske vinkelfrekvens" ω_0 samt konstanten α_0.

OPPGAVE 4

Hva blir strømmen I (eventuelt $I(t)$) i de tre elektriske kretsene a), b) og c) i figuren nedenfor.



Tallverdier: V_0 = 10 V R = 100 Ω C = 10 mF L = 0.1 H

Vi antar at spenningskilden V_0 kobles til ved tidspunktet $t = 0$, og dessuten at $I = 0$ for $t < 0$.

Hvor mye energi leverer spenningskilden til hver av de tre kretsene i tidsrommet mellom $t = 0$ og $t = 10$ s?

Formelsamling

$\int d\boldsymbol{A}$ angir flateintegral og $\int d\boldsymbol{l}$ angir linjeintegral. $\oint$ angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

Elektrostatikk

- Coulombs lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

- Elektrisk felt og potensial:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

- Elektrisk potensial fra punktladning:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Elektrisk fluks:

$$\phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss lov for elektrisk felt:

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{fri}}$$

- Elektrostatisk felt er konservativt:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

- Elektrisk forskyvning:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$

- Kapasitans:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi_m = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss' lov for magnetfeltet:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

- Ampères lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- $\boldsymbol{H}$-feltet:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_r \mu_0}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Magnetisering = magnetisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta V}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faraday (–Henry)s lov:

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

- Ampère–Maxwells lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi_m}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2} \;\; , \;\; M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1} \;\; , \;\; M_{12} = M_{21} = M$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$