NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME I
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
Fredag 8. juni 2007 kl. 0900 - 1300
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (eller tilsvarende).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller B. E. Lian og C. Angell: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (HP30S eller lignende.)

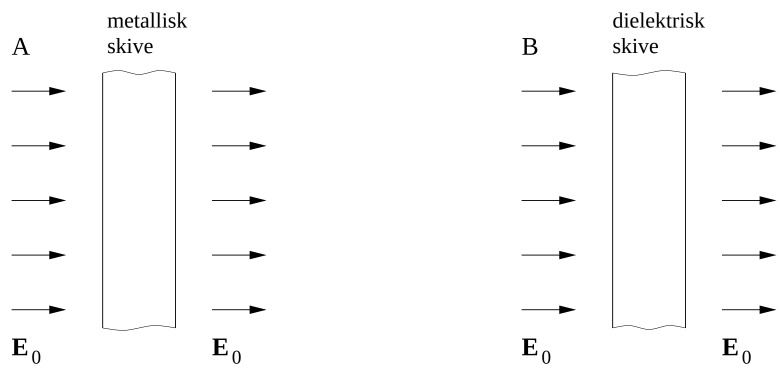
Side 2 - 5: Oppgave 1 - 4.
Vedlegg 1 - 3: Formelsamling.

Prøven består av i alt 10 deloppgaver (1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 4a, 4b). Hver av disse 10 deloppgavene vil bli tillagt like stor vekt under bedømmelsen. Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer. Enhetsvektorer er angitt med hatt over symbolet. Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er luft (vakuum), med permittivitet $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. I oppgaver hvor tallverdier er oppgitt for alle nødvendige størrelser, skal tallsvar bestemmes.

Sensuren er klar senest 29. juni.

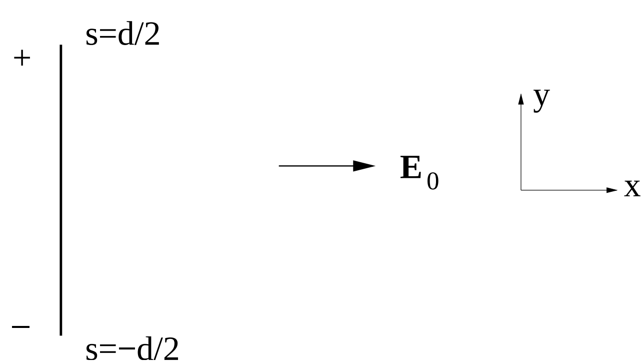
OPPGAVE 1

a) Forklar kort hva som skjer, og hvorfor, når ei metallisk skive plasseres på tvers i et uniformt ytre elektrisk felt $\boldsymbol{E}_0$ (figur A nedenfor). Forklar tilsvarende hva som skjer, og hvorfor, når ei dielektrisk skive plasseres på tvers i et uniformt ytre elektrisk felt $\boldsymbol{E}_0$ (figur B nedenfor). Anta for enkelhets skyld at skivene har stort areal normalt på retningen til det ytre feltet. ("Hva som skjer" refererer her til elektriske ladninger og elektrisk felt i de to skivene.)



b) Ei tynn stang har lengde d og linjeladning (ladning pr lengdeenhet) $\lambda(s) = 2\lambda_0 s/d$. Her er λ_0 en konstant, og s angir posisjonen langs stanga, fra $s = -d/2$ i den ene enden til $s = d/2$ i den andre. Dette er med andre ord en elektrisk dipol, med null nettoladning. Bestem stangas elektriske dipolmoment p. (Tips: Ladninger dq og $-dq$ i innbyrdes avstand $2s$ bidrar med dipolmoment $dp = 2s\,dq$.)

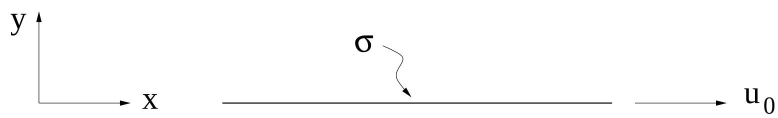
c) Stanga i oppgave *b*) er plassert i et uniformt ytre elektrisk felt $\boldsymbol{E}_0 = E_0\,\hat{x}$ slik at dipolmomentet $\boldsymbol{p}$ peker i positiv y-retning. Bestem dreiemomentet (kraftmomentet) $\boldsymbol{\tau} = \int (\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F})$ (absoluttverdi og retning) som virker på stanga.



Vis med en figur hvilke orienteringer av stanga i det ytre feltet som representerer henholdsvis (1) maksimal potensiell energi; (2) minimal potensiell energi; (3) maksimalt dreiemoment.

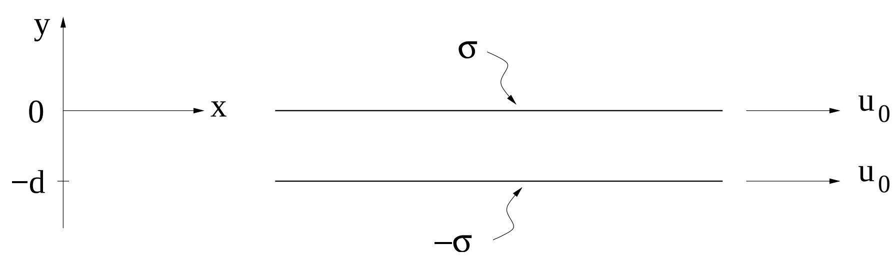
OPPGAVE 2

a) Et uendelig stort plan har uniform (og positiv) ladning σ pr flateenhet og er plassert i xz-planet. Planet med ladninger beveger seg med konstant hastighet $u_0\,\hat{x}$, dvs i positiv x-retning:



Hva blir retningen på det resulterende elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ og magnetfeltet $\boldsymbol{B}$, både over ($y > 0$) og under ($y < 0$) det ladde planet? Bruk Gauss' lov og Amperes lov til å vise at feltene er uniforme på begge sider av planet, med feltstyrke henholdsvis E_0 og B_0. Finn uttrykk for E_0 og B_0 (dvs ved gitte størrelser og eventuelle naturkonstanter). Tegn figurer som tydelig viser hvordan du har gått fram i bruken av Gauss' lov og Amperes lov.

b) To parallelle — og uendelig store — plan har uniform ladning henholdsvis σ og $-\sigma$ pr flateenhet, og begge har flatenormal i y-retning. Det positivt ladde planet er plassert i $y = 0$ (som i oppgave *a*)) mens det negativt ladde planet er plassert i $y = -d$. Begge planene beveger seg med konstant hastighet $u_0\,\hat{x}$:



Hva blir de resulterende feltene $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i de tre områdene $y > 0$, $0 > y > -d$ og $y < -d$? Disse feltene innebærer at de to ladde planene påvirker hverandre med en elektrisk kraft f_E og en magnetisk kraft f_B pr flateenhet. Avgjør for hver av disse om det er snakk om en tiltrekkende eller frastøtende kraft. Bestem forholdet $\kappa = |f_B/f_E|$ mellom magnetisk og elektrisk kraft når planenes hastighet er $u_0 = 3\cdot 10^6$ m/s. (Uttrykk svarene i denne oppgaven ved E_0 og B_0 dersom du ikke greide å bestemme disse i oppgave *a*).)

c) En partikkel med masse m og ladning $q > 0$ starter i origo med null starthastighet ved tidspunktet $t = 0$. Partikkelen befinner seg i "kryssede" uniforme elektriske og magnetiske felt, henholdsvis $\boldsymbol{E} = E\,\hat{y}$ og $\boldsymbol{B} = B\,\hat{z}$. Bruk Newtons andre lov til å vise at partikkelens bevegelse beskrives av ligningene

$$\begin{aligned}\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2\, v_x &= \frac{\omega^2 E}{B},\\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega^2\, v_y &= 0,\end{aligned}$$

og fastlegg derved "syklotronfrekvensen" ω. Partikkelens bane blir

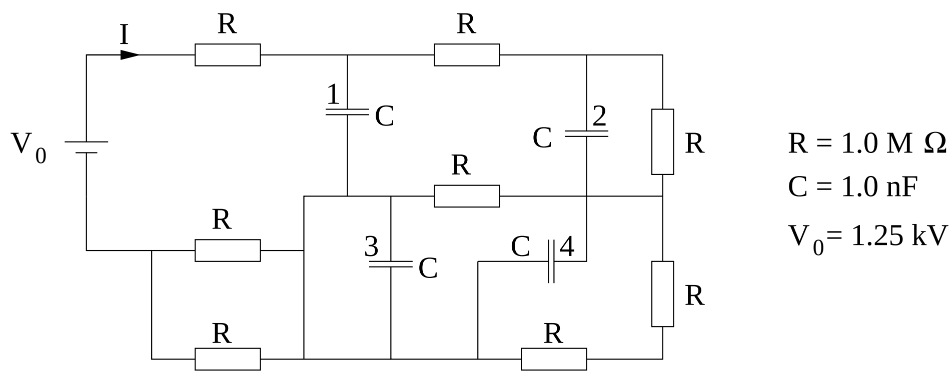
$$\begin{aligned} x(t) &= r_0\,(\omega t - \sin\omega t)\,, \\ y(t) &= r_0\,(1 - \cos\omega t)\,. \end{aligned}$$

Vis at denne banen er løsning av bevegelsesligningene med de gitte startbetingelsene $x(0) = y(0) = 0$ og $v_x(0) = v_y(0) = 0$. Hva blir r_0?

Oppgitt: $\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ (Lorentzkraften)

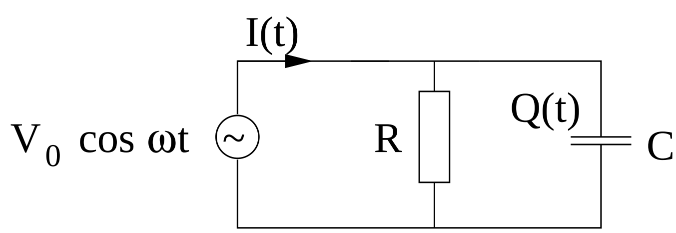
OPPGAVE 3

a) I kretsen nedenfor har likespenningskilden V_0 vært tilkoblet i så lang tid at strømmer i kretsen og ladninger på kondensatorene ikke lenger endrer seg.



Bestem strømmen I, samt ladningene Q_1, Q_2, Q_3 og Q_4 på kondensatorene merket henholdsvis 1, 2, 3 og 4.

b) I kretsen nedenfor er en vekselspenningskilde $V(t) = V_0 \cos\omega t$ koblet til en parallellkobling av en motstand R og en kondensator med kapasitans C.



Vi antar at spenningskilden har vært tilkoblet så lenge at strømmen $I(t)$ svinger med samme vinkelfrekvens som den påtrykte spenningen. Det samme gjelder ladningen $Q(t)$ og strømmene $I_R(t)$ gjennom motstanden og $I_C(t)$ inn og ut av kondensatoren.

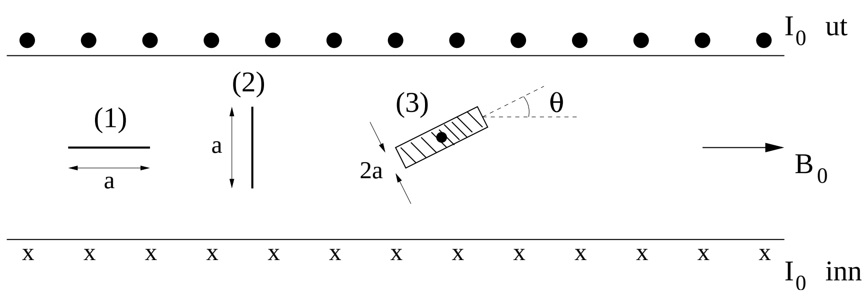
Bruk kravet om ladningsbevarelse og energibevarelse (dvs Kirchhoffs strøm- og spenningsregel) til å bestemme $Q(t)$, $I_R(t)$ og $I_C(t)$. Skriv total strøm "levert" av spenningskilden på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

og bestem faseforskyvningen α mellom strøm og spenning, og den "generaliserte motstanden" (impedansen) $Z(\omega) = V_0/I_0(\omega)$. Kontroller at uttrykket ditt for $Z(\omega)$ er fornuftig når vinkelfrekvensen ω blir svært liten ($\omega \ll 1/RC$).

Oppgitt: $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

OPPGAVE 4



Inne i en tilnærmet uendelig lang og tettviklet spole med n viklinger pr lengdeenhet har vi plassert (1) ei kvadratisk ledersløyfe med sidekanter a og flatenormal vinkelrett på den lange spolens lengderetning; (2) ei kvadratisk ledersløyfe med sidekanter a og flatenormal parallelt med den lange spolens lengderetning; (3) en liten sylinderformet spole med radius a, N viklinger og sylinderakse som danner en vinkel θ med den lange spolens lengderetning.

a) Bestem gjensidig induktans M_i ($i = 1, 2, 3$) mellom den lange spolen og hver av de tre lederne som er plassert inni.

b) I spoletråden på den lange spolen går det en strøm I_0 (se figur). Den lille spolen (3) roterer med vinkelfrekvens ω omkring en akse som peker ut av papirplanet og som går gjennom sentrum av spolen (3). Finn et uttrykk for indusert elektromotorisk spenning $\mathcal{E}_3(t)$ i spolen (3). Bestem amplituden til $\mathcal{E}_3(t)$ når $n = 10^4$ m^{-1}, $N = 50$, $a = 1.0$ cm, $I_0 = 6.0$ A og $\omega = 10^3$ s^{-1}.

Oppgitt: $B_0 = \mu_0 n I_0$

Formelsamling

$\int d\boldsymbol{A}$ angir flateintegral og $\int d\boldsymbol{l}$ angir linjeintegral. $\oint$ angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

Elektrostatikk

- Coulombs lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

- Elektrisk felt og potensial:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

- Elektrisk potensial fra punktladning:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Elektrisk fluks:

$$\phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss lov for elektrisk felt:

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{fri}}$$

- Elektrostatisk felt er konservativt:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

- Elektrisk forskyvning:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$

- Kapasitans:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi_m = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss' lov for magnetfeltet:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

- Ampères lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- $\boldsymbol{H}$-feltet:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_r \mu_0}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Magnetisering = magnetisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta V}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faraday–Henrys lov:

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

- Ampère–Maxwells lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi_m}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2} \;\;,\;\; M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1} \;\;,\;\; M_{12} = M_{21} = M$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$