NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME

Onsdag 3. juni 2009 kl. 0900 - 1300
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- C. Angell og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Side 2 - 6: Oppgave 1 - 5.
Vedlegg 1 - 3: Formelsamling.

Prøven består av 5 oppgaver. Det er angitt i forbindelse med hver enkelt oppgave hvor mye den teller under bedømmelsen. Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer i oppgaveteksten. Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er luft (vakuum), med permittivitet $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Sensuren kan ventes ca 24. juni.

OPPGAVE 1 (Elektrostatikk. Vekt: **a** teller 10%, **b** teller 20%. Totalt 30%.)

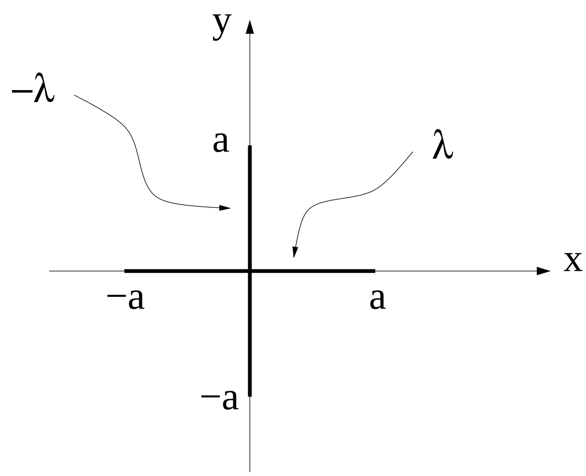
a. To punktladninger er plassert på x-aksen, Q i $x = a$ og $-Q$ i $x = 0$.

i) Hva er systemets netto ladning?

ii) Hva er systemets elektriske dipolmoment?

iii) Bestem den elektriske feltstyrken $E(x)$ på x-aksen. (Anta at $x > a$.)

b. De to punktladningene erstattes nå av to linjeladninger, slik at en positiv ladning Q ligger jevnt fordelt på x-aksen mellom $x = -a$ og $x = a$, og en negativ ladning $-Q$ ligger jevnt fordelt på y-aksen mellom $y = -a$ og $y = a$:



i) Hva er ladningen pr lengdeenhet, henholdsvis λ mellom $-a$ og a på x-aksen og $-\lambda$ mellom $-a$ og a på y-aksen?

ii) Hva er dette systemets elektriske dipolmoment?

iii) Bestem den elektriske feltstyrken $E(x)$ på x-aksen. (Uttrykt bl.a. ved Q og a. Anta også her at $x > a$.)

iv) Langt ute på x-aksen kan $E(x)$ tilnærmet skrives på formen

$$E(x) \simeq \beta\, x^{-n}.$$

Vis dette og fastlegg derved β og n. (n er heltallig.)

[Med "tilnærmet" menes her til såkalt "ledende orden" i den lille dimensjonsløse størrelsen a/x, dvs første ledd i en polynomutvikling i a/x. Merk at punkt iv) i stor grad kan besvares med utgangspunkt i punkt ii), i tilfelle du ikke har fått til punkt iii).]

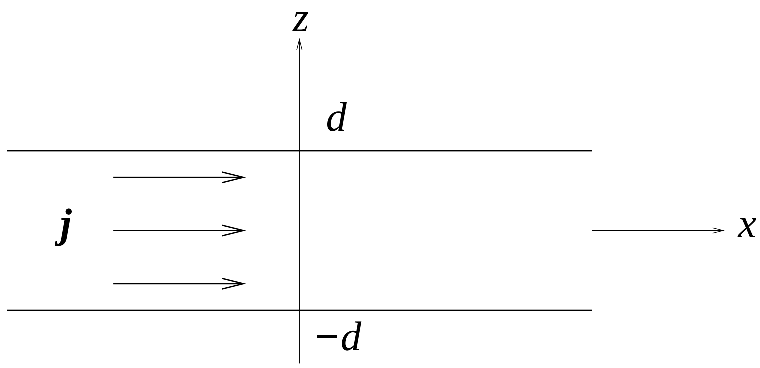
Oppgitt:

$$(1+\alpha)^j \simeq 1 + j\,\alpha \quad (\alpha \ll 1) \qquad , \qquad \boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}\,dq$$

$$\int \frac{dz}{(z+c)^2} = -\frac{1}{z+c} \quad , \quad \int \frac{dz}{(z^2+c^2)^{3/2}} = \frac{z}{c^2(z^2+c^2)^{1/2}}$$

OPPGAVE 2 (Magnetostatikk. Hver deloppgave **a** og **b** teller 10% hver. Totalt 20%.)

a. Ei skive med tykkelse $2d$ og tilnærmet uendelig utstrekning i både x- og y-retning er plassert mellom $z = -d$ og $z = d$. Skiva fører en uniform strøm i positiv x-retning, slik at strømtettheten (dvs strøm pr flateenhet) er $\boldsymbol{j} = j_0\,\hat{x}$



Magnetfeltet $\boldsymbol{B}_0(z)$ som skyldes strømmen i skiva, peker i positiv y-retning for $z < 0$ og i negativ y-retning for $z > 0$: $\boldsymbol{B}_0(z) = B_0(z)\,\hat{y}$, med $B_0(z) = -B_0(-z)$.

i) Bruk Amperes lov til å bestemme $B_0(z)$, både inni og utenfor den strømførende skiva.

ii) Skisser funksjonen $B_0(z)$ mellom $z = -3d$ og $z = 3d$.

b. Oppå den strømførende skiva legges nå ei magnetiserbar (men ikke ledende) skive med tykkelse d og tilnærmet uendelig utstrekning i x- og y-retning. Denne skiva har relativ permeabilitet $\mu_r = 10$ og magnetiseres i magnetfeltet $\boldsymbol{B}_0$ fra den strømførende skiva. Det oppgis at feltet $\boldsymbol{B}_0$ er uniformt mellom $z = d$ og $z = 2d$.

i) Tegn en figur i yz-planet ($d \leq z \leq 2d$) som tydelig illustrerer $\boldsymbol{B}_0$, magnetiseringsvektoren $\boldsymbol{M}$, og den tilhørende induserte strømmen ("magnetiseringsstrømmen") I_m. Både lokalisering og retning på I_m skal angis.

ii) La $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{H}$ være de totale feltene og bestem $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{H}$ inni den magnetiserbare skiva. Skisser $B(z)$ og $H(z)$ mellom $z = -3d$ og $z = 3d$.

Oppgitt:

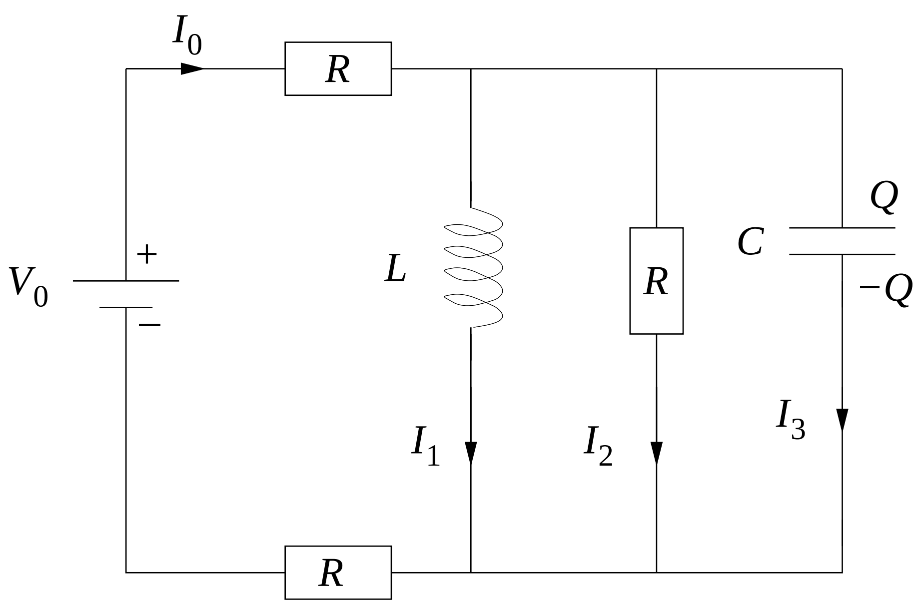
$$I = \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M}$$

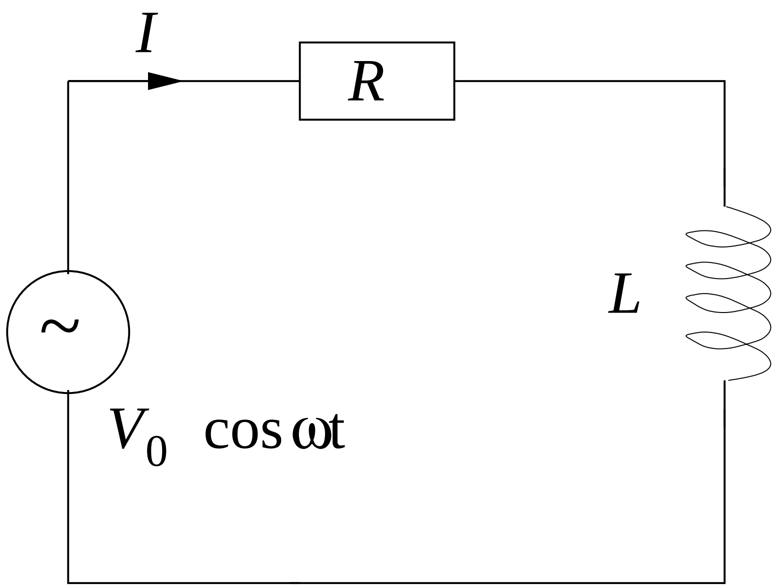
OPPGAVE 3 (DC–krets. Teller 10%.)

Likespenningskilden V_0 i kretsen nedenfor har vært tilkoblet så lenge at strømmene er stasjonære (tidsuavhengige). Bestem de ulike strømstyrkene I_j ($j = 0, 1, 2, 3$), samt ladningen Q på kondensatoren. Tallverdier: $V_0 = 8$ V, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.01$ F, $L = 0.01$ H.



OPPGAVE 4 (AC–krets. Hver deloppgave **a** og **b** teller 10% hver. Totalt 20%.)

Kretsen nedenfor består av en vekselspenningskilde $V(t) = V_0 \cos \omega t$ koblet til en motstand R og en induktans L. R og L er koblet i serie. Strømmen i kretsen kan skrives på formen $I(t) = |I_0| \cos(\omega t - \alpha)$. Kretsens impedans er da $|Z| = V_0/|I_0|$. Med kompleks notasjon, $V(t) = V_0 \exp(i\omega t)$ og $I(t) = I_0 \exp(i\omega t)$, blir impedansen $Z = V_0/I_0 = |Z| \exp(i\alpha)$, med absoluttverdi $|Z| = V_0/|I_0|$ og fasevinkel α (dvs $I_0 = |I_0| \exp(-i\alpha)$). Seriekobling av komplekse impedanser i en AC–krets er analogt med seriekobling av resistanser i en DC–krets.



a. Bestem $|I_0|$ og α for kretsen ovenfor og skisser begge størrelser som funksjon av ω.

[Alternativt, hvis du ikke får til å regne ut $|I_0|$ og α: Diskuter kvalitativt hvordan $|I_0|$ og α vil variere med ω. En slik kvalitativ besvarelse, uten utregning, vil gi betydelig, men ikke full uttelling.]

b. Vis at amplitudene til spenningsfallene over henholdsvis R og L blir

$$V_{R0} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \quad , \quad V_{L0} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0/\omega)^2}}$$

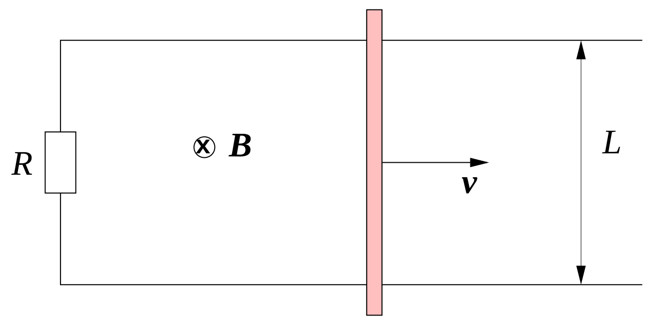
og fastlegg dermed kretsens "karakteristiske frekvens" ω_0. Skisser V_{R0} og V_{L0} som funksjoner av ω.

[Alternativt, hvis utregningen byr på problemer, kan du også her diskutere kvalitativt hvordan V_{R0} og V_{L0} vil variere med ω.]

Oppgitt:
Spenningsfall over induktans: $L \, dI/dt$.

OPPGAVE 5 (Induksjon. Hver deloppgave **a** og **b** teller 10% hver. Totalt 20%.)

Ei metallstang med masse m glir uten friksjon på to parallelle ledere i innbyrdes avstand L som vist i figuren. De to parallelle lederne er koblet sammen via en motstand R slik at vi får en lukket krets. Hele systemet befinner seg i et uniformt magnetfelt $\boldsymbol{B}$ som peker inn i planet.



a. Stanga har hastighet v mot høyre.

i) Bruk Faradays induksjonslov sammen med Ohms lov til å bestemme indusert spenning V og indusert strøm I i kretsen. (Du kan anta at kretsens selvinduktans er neglisjerbar.)

ii) Bruk Lenz' lov til å argumentere for hvilken retning strømmen går.

b. Det oppgis at strømmen i kretsen er proporsjonal med stangas hastighet, dvs $I = \lambda\, v$. (Hvis du fikk til oppgave **a**-i, har du allerede fastlagt λ. Hvis ikke kan du regne videre og anta at λ er kjent.)

i) Bestem den bremsende magnetiske krafta F på stanga.

ii) Stanga slippes ved tidspunktet $t = 0$ med hastighet v_0. Bruk Newtons 2. lov til å vise at hastigheten avtar eksponentielt,

$$v(t) = v_0\, e^{-t/\tau},$$

og fastlegg dermed "tidskonstanten" τ.

iii) Hvor langt kommer stanga?

Oppgitt:

$$V = -d\phi_m/dt$$

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

Formelsamling

$\int dA$ angir flateintegral og $\int d\boldsymbol{l}$ angir linjeintegral. $\oint$ angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. **Fete** symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

Elektrostatikk

- Coulombs lov:
$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$
- Elektrisk felt og potensial:
$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$
$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$
- Elektrisk potensial fra punktladning:
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
- Elektrisk fluks:
$$\phi_E = \int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A}$$
- Elektrostatisk felt er konservativt:
$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$$
- Gauss' lov for elektrisk felt og elektrisk forskyvning:
$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A} = q$$
$$\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{fri}}$$
- Elektrisk forskyvning:
$$\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E}$$
- Elektrisk dipolmoment; generell definisjon:
$$\boldsymbol{p} = \int_\Omega \boldsymbol{r}\,dq$$
- Elektrisk dipolmoment; for punktladninger $\pm q$ i avstand $\boldsymbol{d}$:
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$

- Kapasitans:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi_m = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss' lov for magnetfeltet:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

- Ampères lov for $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{H}$:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Magnetiserende felt $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_r \mu_0}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

- Magnetisk dipolmoment; generell definisjon:

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\, d^3 r$$

- Magnetisk dipolmoment; for plan strømsløyfe:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A} = IA\hat{n}$$

- Magnetisering = magnetisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta V}$$

- Magnetisk kraft på strømførende leder; generelt:

$$\boldsymbol{F} = \int_L d\boldsymbol{F} = I \int_L d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faraday–Henrys lov:

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

- Ampère–Maxwells lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi_m}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2} \ \ , \ \ M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1} \ \ , \ \ M_{12} = M_{21} = M$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$