BOKMÅL

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

KONTINUASJONSEKSAMEN i TFY4155 ELEKTROMAGNETISME og FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Eksamensdato: Fredag 20. august 2010
Eksamenstid: 09:00 - 13:00

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk, Arne Mikkelsen, tlf. 7359 3433 / 486 05 392
Tillatte hjelpemidler (kode C):

Bestemt enkel godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave)
C.Angell og B.E.Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelliste

Sensurdato: Seinest 10. sep. 2010

Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen.

I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Noen generelle merknader:

- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
- Metall er synonymt med elektrisk leder. Isolator er synonymt med dielektrikum.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.
- Dersom ikke annet er oppgitt
    - antas det at systemet er i elektrostatisk likevekt,
    - er "potensial" underforstått "elektrostatisk potensial" og tilsvarende for "potensiell energi",
    - er nullpunkt for elektrostatisk potensial og potensiell energi valgt uendelig langt borte,
    - er Q, ρ og σ (uten indeks) fri ladning.

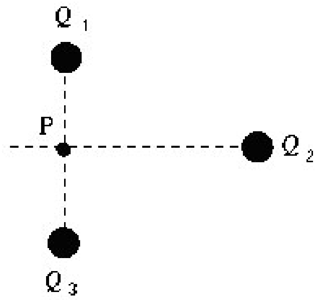
I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**

Svar på flervalgsspørsmål skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende dette:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Svar:										

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 25%)

a) Tre positive og like ladninger $Q_1 = Q_2 = Q_3$ er plassert i hjørnene av en likebeint trekant som vist i figuren. Punktet P ligger på midtpunktet av linja mellom Q_1 og Q_3. Det elektriske feltet ved P er



A) null.
B) Ikke null og har retning som fra P til Q_3.
C) Ikke null og har retning som fra P til Q_2.
D) Ikke null og har retning som fra Q_1 til Q_2.
E) Ingen av disse er rett.

b) En parallellplatekondensator har luft mellom platene og er ladd opp til 500 V med spenningsforsyningen frakopla. Et plastmateriale med relativ permittivitet 5,0 føres inn mellom platene og fyller det meste av rommet. Energien på kondensatorplatene vil da

A) øke
B) avta
C) ikke endres
D) bli null
E) opplysninger mangler for å kunne svare på spørsmålet

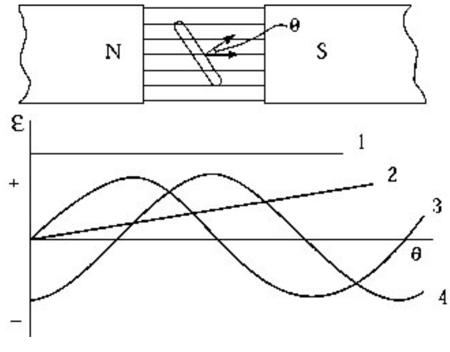
c) Hvis et dielektrisk materiale blir satt inn mellom platene i en parallellplatekondensator når den er forbundet til en spenningsforsyning på 100 V, vil

A) spenningen over kondensatoren avta
B) elektrisk felt mellom platene avta
C) elektrisk felt mellom platene øke
D) ladningen på kondensatoren avta
E) ladningen på kondensatoren øke

d) Ei kompassnål befinner seg i et homogent magnetisk felt med dens sydpol pekende i positiv retning av $\vec{B}$. Nettokraften på kompassnåla

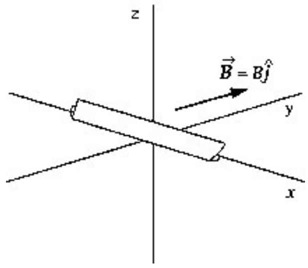
A) virker i samme retningen som $\vec{B}$.
B) virker i retning rett vinkel med $\vec{B}$.
C) virker i retning rett vinkel med planet gjennom $\vec{B}$ og kompassnåla.
D) virker i motsatt retning av $\vec{B}$.
E) er lik null.

e) En enkel generator består av en rektangulær strømsløyfe som roterer i retning mot klokka mellom to magnetiske poler som vist i figuren. Vinkelen mellom magnetfeltet og normalen til strømsløyfa er θ. Grafen viser ulike kurver for ems'en $\mathcal{E}$ som funksjon av θ med $\theta = 0$ i origo. Hvilken av kurvene representerer $\mathcal{E}$ riktig?



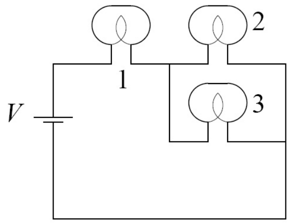
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) Ingen av kurvene

f) En ledningsbit er plassert i et område med uniformt magnetfelt i y-retningen, som vist i figuren. Ledningen har retning langs x-aksen. Du observerer at det er *ingen* indusert ems i ledningen når den beveges. Du kan da konkludere med at ledningen må bevege seg i



A) $\pm z$-retning
B) $\pm x$-retning
C) $\pm y$-retning
D) enhver retning som danner en vinkel forskjellig fra null med x-retningen
E) umulig, ledningen beveger seg ikke

g) Tre identiske lyspærer, hver med motstand R er koplet til et batteri med elektromotirisk spenning V. Vi antar at pærenes motstand R ikke avhenger av strømmen gjennom dem og at de tåler store strømmer. Hva skjer med lysstyrken i pære nummer 3 hvis vi skrur ut pære nummer 2?



A) Pære nr. 3 slokker.
B) Pære nr. 3 lyser svakere.
C) Pære nr. 3 lyser like sterkt som før.
D) Pære nr. 3 lyser sterkere.
E) Pære nr. 3 vil eksplodere.

h) Et elektron med masse m_e og ladning $-e$ befinner seg i et uniformt magnetfelt $\vec{B} = B_0\ \hat{\mathbf{k}}$. Ved tidspunktet $t = 0$ har elektronet hastighet $\vec{v} = v_0\ \hat{\mathbf{i}} + v_0\ \hat{\mathbf{j}}$. Hva slags bevegelse får elektronet?

A Sirkelbevegelse med radius $m_e v_0/eB_0$
B Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2}m_e v_0/eB_0$
C Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2}eB_0/m_e$
D Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2}m_e/eB_0$
E Sirkelbevegelse med radius eB_0/m_e

i) Maxwell generaliserte Amperes lov slik at den inkluderer forskyvningsstrøm, og loven lyder da

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\,.$$

I denne likningen er forskyvningsstrømmen definert

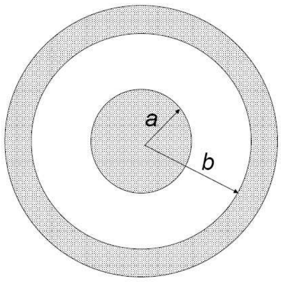
A) $I + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$
B) I
C) $\epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right)\,\mathrm{d}t$
D) $\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$
E) $\epsilon_0 \Phi_E$

j) Potensialet i et område er $V(y) = kV_0 y$, der k og V_0 er konstanter. Hvor mye potensiell elektrisk energi U befinner seg da i volumet avgrenset av $0 \leq x \leq \pi/k, \quad 0 \leq y \leq \pi/k, \quad 0 \leq z \leq \pi/k$?

A) $U = \epsilon_0 V_0^2 \pi^3/2k$
B) $U = \epsilon_0 V_0^2 \pi^3/4k$
C) $U = \epsilon_0 V_0^2 \pi^3/k$
D) $U = \epsilon_0 V_0^2 \pi^4/k^2$
E) $U = \epsilon_0 V_0^2 \pi^4/6k$

Oppgave 2. Elektrostatikk (teller 25%)

En sylinderkondensator (koaksialkabel) består av en innerleder med radius a og en ytterleder med indre radius b, som vist i figuren. Tykkelsen av ytterlederen har ingen betydning. Lengden (ℓ) av kondensatoren er så stor at vi kan se bort fra effekter nær endene. Innerlederen har elektrisk ladning per lengdeenhet lik $+\lambda$ og ytterlederen ladning $-\lambda$. Volumet mellom lederne har permittivitet ϵ_0 og er i oppgavens del a) - c) ladningsfritt.



a) Vis at den elektriske feltstyrken $\vec{E}(r)$ kan uttrykkes

$$\vec{E}(r) = \vec{E}_0/r$$

der konstanten $\vec{E}_0$ kan ha ulike verdier for ulike deler av rommet. Finn $\vec{E}_0$ for alle deler av rommet (alle r).

b) Ytterlederen har potensial $V(b) = 0$. Finn potensialet $V(a)$ for innerlederen. Oppgitt at $\lambda > 0$, er $V(a)$ positiv eller negativ?

c) Finn den lagrede elektrostatiske energien W' per lengdeenhet.

Volumet mellom lederne fra a til b fylles nå med en romladning $\rho(r)$, slik at potensialet mellom lederne ikke lenger er som ovenfor, men gitt av:

$$V(r) = V_0 \frac{b-r}{b-a}\,.$$

Potensialet varierer altså lineært fra $V(a) = V_0$ til $V(b) = 0$. Mellomrommet fra a til b har fortsatt permeabilitet ϵ_0. Ladning per lengdeenhet på ytterleder og innerleder er nå ikke gitt (og du trenger heller ikke bestemme disse).

d) Finn uttrykk for den elektriske feltstyrken $E(r)$ mellom lederne og finn romladningen $\rho(r)$.

Oppgave 3. Magnetisme (teller 25%)

En tilnærmet uendelig lang og rett sylinderformet leder med radius R fører en elektrisk strøm som ikke varierer med tida. Strømtettheten (strøm per flateenhet) i lederen avtar lineært med avstanden r fra lederens senterakse:

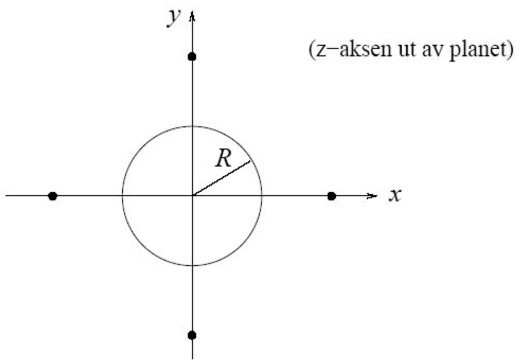
$$\vec{J}(r) = J_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Vi har valgt koordinatsystem slik at lederens senterakse sammenfaller med z-aksen, og slik at strømmen går i positiv z-retning.

a) Finn total strøm I_0 i lederen uttrykt med bl.a. J_0.

Figuren til høyre er et snitt gjennom lederen i xy-planet, slik at strømmen I kommer opp av planet.

b) Tegn vektorer som illustrerer magnetfeltet $\vec{B}$ i de fire angitte punktene i avstand $2R$ fra senteraksen på henholdsvis positiv og negativ x- og y-akse.



c) Bruk Amperes lov til å finne magnetfeltet $B_u(r)$ utenfor den strømførende lederen ($r > R$), uttrykt med bl.a. J_0 og R.

(Oppg. 3 forts....)

d) Magnetfeltet inni den strømførende lederen ($r < R$) er oppgitt til å være

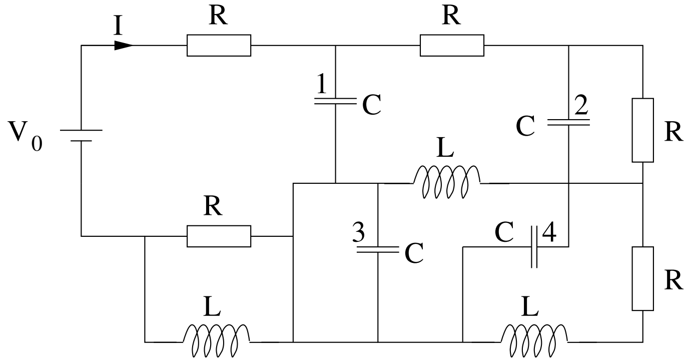
$$B_{\rm i}(r) = C_1 \cdot r + C_2 \cdot r^2 \,.$$

Bruk Amperes lov til å bestemme konstantene C_1 og C_2. Finn også tallverdier (med enhet) når $J_0 = 5,00 \cdot 10^4$ A/m^2 og $R = 1,00$ cm.

Oppgave 4. Kretser (teller 15%)

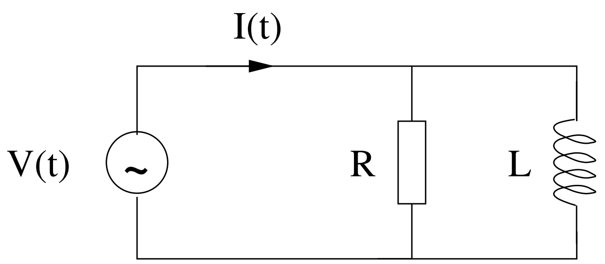
a) Kretsen nedenfor består av fem motstander R, fire kapasitanser C og tre induktanser L. Likespenningskilden V_0 har vært tilkoblet i så lang tid at strømmer i kretsen og ladninger på kondensatorene ikke lenger endrer seg.

Bestem strømmen I, samt ladningene Q_1, Q_2, Q_3 og Q_4 på kondensatorene merket henholdsvis 1, 2, 3 og 4.



R = 2.0 M Ω
C = 2.0 nF
L = 1.0 nH
V_0= 1.50 kV

b) I kretsen til høyre er en vekselspenningskilde $V(t) = V_0 \cos \omega t$ koblet til en parallellkobling av en motstand R og en induktans L. Vi antar at spenningskilden har vært tilkoblet så lenge at strømmen $I(t)$ svinger med samme vinkelfrekvens som den påtrykte spenningen.



Skriv spenningen $V(t)$ og strømmen i kretsen $I(t)$ på kompleks form:

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} \qquad I(t) = I_0 \, e^{i\omega t}$$

der spenningsamplituden V_0 er reell mens strømamplituden I_0 er kompleks. Bruk Kirchhoffs regler til å bestemme den komplekse strømamplituden $I_0(\omega)$. Hva er faseforskyvningen mellom strøm og spenning?

Oppgave 5. Induksjon (teller 10%)

En plan, rektangulær ledersløyfe med sidekanter a og $2a$ ligger med venstre kant parallell med en rett leder i avstand R, som vist i figuren til høyre. Lederen er lang og tynn og fører en tidsavhengig strøm

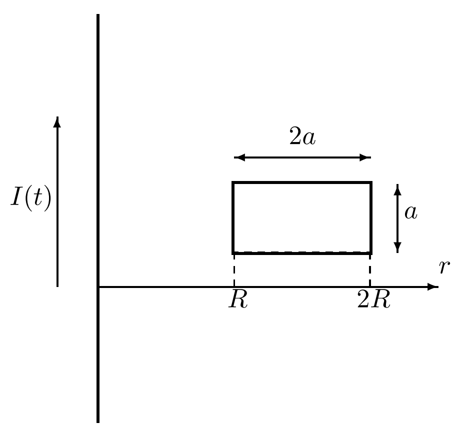
$$I(t) = I_0 \cos \omega t \,.$$

Bruk Faradays induksjonslov til å finne uttrykk for den elektromotoriske spenningen $\mathcal{E}(t)$ som induseres i den rektangulære ledersløyfa som følge av strømmen $I(t)$ i den rette lederen.

Oppgitt: Magnetfelt rundt lederen er

$$B(r,t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I(t)}{r}$$

der r er avstanden fra lederens senterakse.



FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

(Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning)

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$ $\qquad \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$ $\qquad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon$ $\qquad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i}$ $\qquad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon$ $\qquad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i}$ $\qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ $\qquad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E$ $\qquad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I_c + \epsilon\dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right)$ $\qquad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I_c + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\qquad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra − til +) $\qquad$ Polarisering: $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}}{V}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = I\vec{A}$ $\qquad$ Magnetisering: $\vec{M} = \dfrac{\sum \vec{\mu}}{V}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E}$ $\qquad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E}$ $\qquad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H}$ $\qquad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H}$ $\qquad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\displaystyle\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$, $\qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$,

Energi og energitetthet: $U = \dfrac{1}{2}\iiint V\mathrm{d}q$ $\qquad$ Elektrisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{D}\vec{E}$ $\qquad$ Magnetisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \dfrac{Q}{V}$ $\qquad$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ $\qquad$ Energi: $U = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\dfrac{A}{d}$ $\qquad$ Parallellkopling: $C = \displaystyle\sum_i C_i$ $\qquad$ Seriekopling: $\dfrac{1}{C} = \displaystyle\sum_i \dfrac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}$ $\qquad$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ $\qquad \mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \dfrac{I}{2\pi r}$ $\qquad$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\dfrac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI$, $\sigma\vec{E} = \vec{J}$ $\qquad$ Strømtetthet: $\vec{J} = nq\vec{v}_\mathrm{d}$ der $\vec{v}_\mathrm{d} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Spoler: $L = N\dfrac{\Phi_B}{I}$ $\qquad U = \dfrac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluks som er årsak til strømmen.

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x, y, z)*, med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ *og* $\hat{\mathbf{k}}$*:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
\mathrm{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Sylinderkoordinater (r, ϕ, z)*, med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ *og* $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ)*, med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$*:*

$$\oiint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ \mathrm{d}\tau$$

$$\oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\tau &= r^2\ \mathrm{d}r\ \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\ \mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\tau &= r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\ \mathrm{d}r\ \ell
\end{aligned}$$