Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

BOKMÅL

EKSAMEN
i
TFY4155/FY1003
ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Eksamensdato: Tirsdag 24. mai 2011
Eksamenstid: 09:00 - 13:00

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk, Arne Mikkelsen, tlf. 486 05 392 / 7359 3433
Tillatte hjelpemidler (kode C):
Bestemt enkel godkjent kalkulator.
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelark.

Sensurdato: Innen 15. juni 2011.

Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen. I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Noen generelle merknader:
- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
- Metall er synonymt med elektrisk leder. Isolator er synonymt med dielektrikum.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.
- Dersom ikke annet er oppgitt
  - antas det at systemet er i elektrostatisk likevekt,
  - er "potensial" underforstått "elektrostatisk potensial" og tilsvarende for "potensiell energi",
  - er nullpunkt for elektrostatisk potensial og potensiell energi valgt uendelig langt borte,
  - er Q, ρ og σ (uten indeks) fri ladning.

I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**

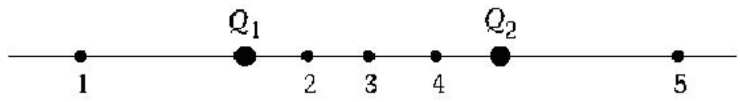
Svar på flervalgsspørsmål i Oppgave 1 skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende den følgende:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Mitt svar:											

Oppgave 1. Elleve flervalgsspørsmål (teller 30%)

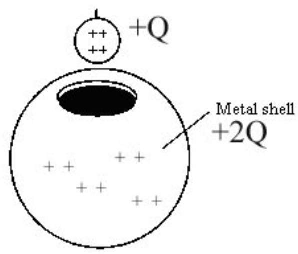
a) To ladninger $Q_1 = -q$ og $Q_2 = +4q$ blir plassert som vist i figuren. Av de fem nummererte posisjoner vist er det elektriske feltet null i en posisjon. Det er null ved posisjonen

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



b) Ei lita metallkule med positiv ladning Q føres gjennom et hull og inn i et metallskall som er ladd med positiv ladning $2Q$. Når kula kommer i kontakt med det indre av metallskallet vil kulas ladning

A) forbli Q
B) bli $3Q$
C) bli $\frac{3}{2}Q$
D) bli 0
E) ikke kunne bestemmes uten å kjenne dimensjonen på kule og skall

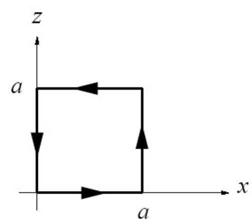


c) Hvis et dielektrisk materiale blir satt inn mellom platene i en parallellplatekondensator når den er forbundet til ei spenningsforsyning på 100 V, vil

A) spenningen over kondensatoren avta
B) elektrisk felt mellom platene avta
C) elektrisk felt mellom platene øke
D) ladningen på kondensatoren avta
E) ladningen på kondensatoren øke

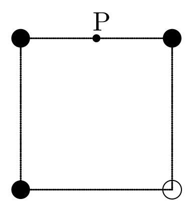
d) Hvilket av disse er et mulig konservativt elektrostatisk felt? Tips i figuren til høyre.

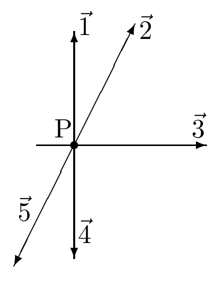
A) $E = E_0\left(\frac{x}{a}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{z}{a}\,\hat{\mathbf{k}}\right)$
B) $E = E_0\frac{x}{a}\,\hat{\mathbf{k}}$
C) $E = E_0\left(\frac{x}{a}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{a}\,\hat{\mathbf{k}}\right)$
D) $E = E_0\frac{z}{a}\,\hat{\mathbf{i}}$
E) $E = E_0\left(\frac{z}{a}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{z}{a}\,\hat{\mathbf{k}}\right)$



e) Et kvadrat har tre like positive ladninger Q i tre av dets hjørner (vist med svart sirkel) og en negativ ladning $-Q$ i det fjerde hjørnet (åpen sirkel). Det elektriske feltet i punkt P midt på øverste sidekant vil ha retning langs linja

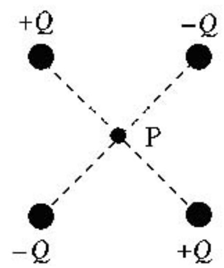
A) $\vec{1}$
B) $\vec{2}$
C) $\vec{3}$
D) $\vec{4}$
E) $\vec{5}$





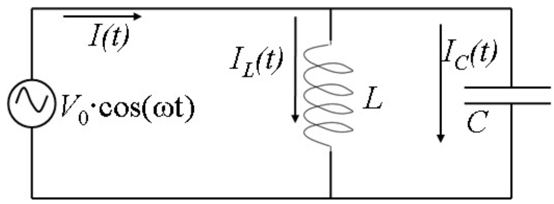
f) Fire ladninger er plassert i hjørnene på et kvadrat som vist i figuren. Det elektriske feltet E og det elektriske potensialet V (relativt uendelig) i punktet P i sentrum av kvadratet oppfyller

A) $E \neq 0$ og $V > 0$
B) $E = 0$ og $V = 0$
C) $E = 0$ og $V > 0$
D) $E \neq 0$ og $V < 0$
E) Ingen av disse er korrekt



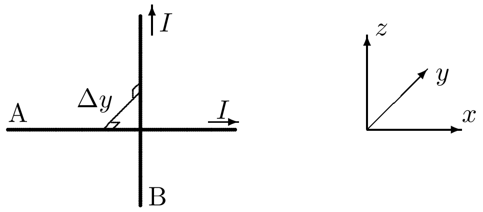
g) Kretsen i figuren består av en vekselspenningskilde og en parallellkopling av en induktans og en kondensator. Strøm i de tre ulike greiner er angitt. Hvilken av de følgende påstander er sann?

A) $I_L(t)$ har maksimal amplityde ved $\omega = \sqrt{1/(LC)}$
B) $I_L(t)$ har minimal amplityde ved $\omega = \sqrt{1/(LC)}$
C) $I(t)$ har maksimal amplityde ved $\omega = \sqrt{1/(LC)}$
D) $I(t)$ har minimal amplityde ved $\omega = \sqrt{1/(LC)}$
E) $I_C(t)$ har minimal amplityde ved $\omega = \sqrt{1/(LC)}$



h) En uendelig lang, rett leder A i x-retning fører en strøm mot høyre som vist i figuren. En annen uendelig lang, rett leder B i z-retning fører strøm oppover. Ledningene har en avstand $\Delta y = 1,0$ m på det nærmeste. Hva er retningen til netto magnetisk kraft på ledning A?

A) retning $+z$ (oppover)
B) retning $+x$ (mot høyre)
C) retning $-x$ (mot venstre)
D) retning $-z$ (nedover)
E) nettokraft er lik null



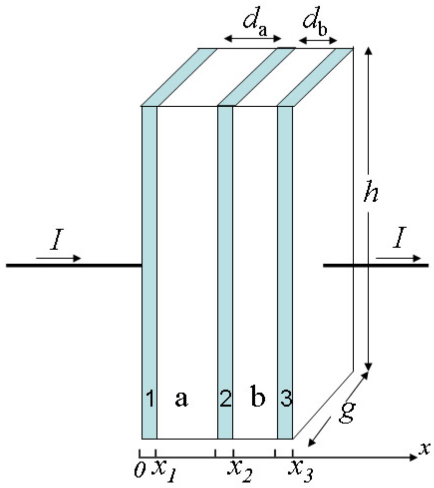
i) Når det føres et materiale inn i det indre av en solenoide som fører en konstant strøm, måles magnetisk flukstetthet B til å falle med 0,005 %. Da er den magnetiske susceptibiliteten til materialet lik
A) $-5 \cdot 10^{-5}$
B) $+5 \cdot 10^{-5}$
C) $1,00005$
D) $0,99995$
E) Mer informasjon trengs for å gi svar

j) Et elektron med masse m_e og ladning $-e$ befinner seg i et uniformt magnetfelt $\vec{B} = B_0\ \hat{\mathbf{k}}$. Ved tidspunktet $t = 0$ har elektronet hastighet $\vec{v} = v_0\ \hat{\mathbf{j}} + v_0\ \hat{\mathbf{k}}$. Hva slags bevegelse får elektronet?
A) Sirkelbevegelse med radius $m_e v_0/eB_0$
B) Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2} m_e v_0/eB_0$
C) Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2} m_e/eB_0$
D) Heliksbevegelse med radius $m_e v_0/eB_0$
E) Heliksbevegelse med radius $\sqrt{2} m_e v_0/eB_0$

k) Hvilken av de følgende påstander strider mot en av Maxwells likninger?
A) Et tidsvarierende magnetisk felt produserer et elektrisk felt
B) Netto magnetisk fluks gjennom ei lukka overflate avhenger av strømmen inni
C) Et tidsvarierende elektrisk felt produserer et magnetisk felt
D) Netto elektrisk fluks gjennom ei lukka overflate avhenger av ladningen innenfor
E) Ingen av disse påstander strider mot noen av Maxwells likninger.

Oppgave 2. Dielektrikum. (teller 23 %)

Figuren viser en sammensatt parallellplatekondensator som består av tre lederplater 1, 2 og 3 hver med plateareal $A = gh$. Plateavstander er d_a og d_b og disse er begge mye mindre enn g og h slik at randeffekter kan neglisjeres. Platenes tykkelse er gitt i figuren, men er uvesentlig. Området a mellom plate 1 og 2 er fylt av et medium med permittivitet $\epsilon_\mathrm{a} = \epsilon_0$. Området b mellom plate 2 og 3 er fylt med et medium med permittivitet $\epsilon_\mathrm{a} = 3\epsilon_0$.



Kondensatoren lades opp med en positiv strøm I inn på plate 1 og tilsvarende ut fra plate 3 i tidsrommet $t = 0$ til $t = t_0$.

a) Etter ei tid t_0 har plate 1 fått ladning $Q_1 = I \cdot t_0$. Hva er nettoladningene Q_2 og Q_3 på henholdsvis platene 2 og 3?

b) Bestem ut fra Gauss' lov elektrisk flukstetthet $\vec{D}_\mathrm{a}$ og $\vec{D}_\mathrm{b}$ og elektriske feltstyrker $\vec{E}_\mathrm{a}$ og $\vec{E}_\mathrm{b}$ i område a og b mellom platene. Skisser $D(x)$ og $E(x)$ som funksjon av x i området fra $x = 0$ til $x = x_3$, dvs. i lederplatene og mellom lederplatene.

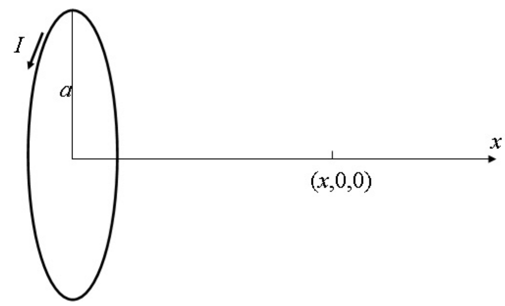
c) Bestem potensialforskjellen $V_{13} = V_1 - V_3$ mellom plate 1 og 3. Finn også kapasitansen C for kondensatoren, uttrykt ved ϵ_0 og geometriske størrelser.

d) Finn polariseringen P_a og P_b i henholdsvis medium a og b.

e) Bruk $\vec{D}$ til å beregne forskyvningsstrømmene I_a og I_b i henholdsvis medium a og b når kondensatoren er under oppladning (tid $t < t_0$).

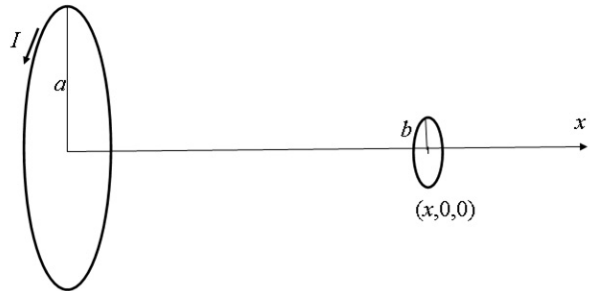
Oppgave 3. Magnetisk induksjon (teller 22 %)

a) Ei sirkelformet strømsløyfe med radius a fører strømmen I. Sirkelen er normal x-aksen og har sentrum i origo. Strømretningen er som vist i figuren.



Bruk Biot-Savarts lov til å vise at $\vec{B}$-feltet på x-aksen i et punkt $(x, 0, 0)$ i størrelse og retning er gitt ved

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \,\hat{\mathbf{i}} \,.$$

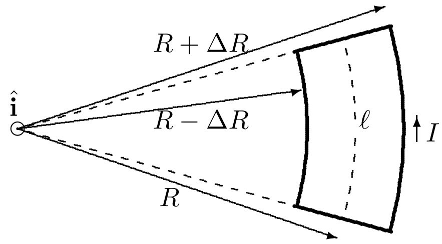


b) Ei anna sirkulær sløyfe med radius b har sentrum i $(x, 0, 0)$ og er også normal på x-aksen. Bestem gjensidig induktans M mellom de to sløyfene når det forutsettes at $x \gg a$ og $x \gg b$.

c) Den andre sløyfa roterer nå med en vinkelhastighet ω omkring en rotasjonsakse normalt x-aksen og som går gjennom sirkelsentrum i $(x, 0, 0)$. Bestem elektromotorisk spenning indusert i denne sløyfa, idet du fortsatt antar $x \gg a$ og $x \gg b$. Har du funnet svar i b), så uttrykk også svaret med gjensidig induktans M.

Oppgave 4. Magnetfelt (teller 8 %)

Ei plan sløyfe ligger i yz-planet (papirplanet) slik at $\hat{\mathbf{i}}$ peker normalt opp. Sløyfa fører strømmen I og er avgrensa av to sirkelbuer med radier $R + \Delta R$ og $R - \Delta R$, og to radielle stråler fra et felles sirkelsentrum i origo, slik som vist på figuren. Den stiplede buen med radius R har buelengde ℓ. Alle sirkelbuene har felles sentrum i origo. I beregningene som følger, anta at $\Delta R \ll R$ og $\ell \ll R$.



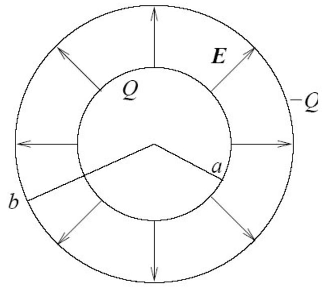
Bestem $\vec{B}$-feltet origo, som følge av sløyfestrømmen. TIPS: Du kan få nytte av oppgitt $\vec{B}$ i oppgave 3a).

Hva blir vektoruttrykket for strømsløyfas magnetiske dipolmoment? (Når $\Delta R \ll R$ og $\ell \ll R$.)

Oppgave 5. Elektrostatisk energi (teller 7 %)

To konsentriske metalliske kuleskall med radius henholdsvis a og b ($b > a$) har uniformt fordelt ladning henholdsvis Q og $-Q$. Mellom kuleskallene er det luft med permittivitet ϵ_0.

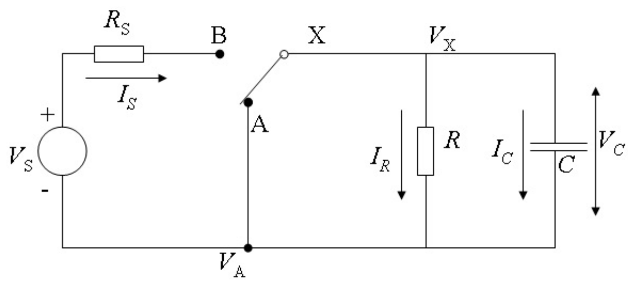
Finn uttrykk for den potensielle energien U lagra i det elektriske feltet mellom kuleskallene.



Oppgave 6. Kretser (teller 10 %)

Kretsen i figuren består av en spenningskilde V_S i serie med en motstand R_S, en bryter, og en parallellkopling av en motstand R og en kondensator med kapasitans C. Bryteren har stått i stilling A i lang tid og flyttes til B ved ei tid $t = 0$.

TALLVERDIER: $V_S = 10,0$ V, $R_S = 10,0\ \Omega$, $R = 100\ \Omega$, $C = 1,00\ \mu$F.



a) Svar kort på følgende spørsmål (tallverdi med enheter):
i) Hva er spenningen V_C over kondensatoren straks etter bryteren er slått over (ved $t = 0^+$) ?
ii) Hva er strømmen I_R gjennom motstanden R straks etter bryteren er slått over (ved $t = 0^+$) ?
iii) Hva er strømmen I_S gjennom motstanden R_S straks etter bryteren er slått over (ved $t = 0^+$) ?
iv) Hva er spenningen V_C over kondensatoren når det er gått veldig lang tid ($t \to \infty$) ?

b) Vi betrakter nå kretsen i tida $t > 0$ (etter bryteren er satt i stilling B). Potensialet defineres null på "grunnlinja" ($V_A = 0$ V) mens potensialet i kretsen ved punkt X benevnes V_X.

i) Sett opp knutepunktlikning (Kirchoffs 1. lov) for kretsen.

På dette grunnlag kan det settes opp ei differensiallikning for V_X, som kan skrives på formen

$$\tau \cdot \frac{\mathrm{d}V_X}{\mathrm{d}t} + V_X = \gamma \cdot V_S\,.$$

ii) Vis dette, og bestem konstantene τ og γ (både bokstavuttrykk og tallverdi med enheter). (Differensiallikninga skal ikke løses.)

FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

(Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning)

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$ $\qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$ $\qquad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon$ $\qquad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i}$ $\qquad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon$ $\qquad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i}$ $\qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ $\qquad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E$ $\qquad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I_c + \epsilon\frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right)$ $\qquad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I_c + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\qquad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra $-$ til $+$) $\qquad$ Polarisering: $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{V}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = I\vec{A}$ $\qquad$ Magnetisering: $\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}}{V}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E}$ $\qquad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E}$ $\qquad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H}$ $\qquad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H}$ $\qquad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$, $\qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$,

Energi og energitetthet: $U = \frac{1}{2}\iiint V\mathrm{d}q$ $\qquad$ Elektrisk: $u = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}$ $\qquad$ Magnetisk: $u = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \frac{Q}{V}$ $\qquad$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ $\qquad$ Energi: $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\frac{A}{d}$ $\qquad$ Parallellkopling: $C = \sum_i C_i$ $\qquad$ Seriekopling: $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}$ $\qquad$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ $\qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \frac{I}{2\pi r}$ $\qquad$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\frac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI$, $\sigma\vec{E} = \vec{J}$ $\qquad$ Strømtetthet: $\vec{J} = nq\vec{v}_\mathrm{d}$ der $\vec{v}_\mathrm{d} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Induktans: $\mathcal{E} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\qquad \mathcal{E}_2 = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ $\qquad$ Spoler: $L = N\frac{\Phi_B}{I}$ $\qquad U = \frac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluks som er årsak til strømmen.

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x, y, z)*, med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ *og* $\hat{\mathbf{k}}$*:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
\mathrm{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Sylinderkoordinater (r, ϕ, z)*, med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ *og* $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ)*, med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$*:*

$$\oint\!\!\!\oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ \mathrm{d}\tau$$

$$\oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\tau &= r^2\,\mathrm{d}r\ \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\tau &= r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\ell
\end{aligned}$$