Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

KONTINUASJONSEKSAMEN
i
TFY4155/FY1003
ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Eksamensdato: Mandag 15. august 2011
Eksamenstid: 09:00 - 13:00

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk, Arne Mikkelsen, tlf. 7359 3433 / 486 05 392
Tillatte hjelpemidler (kode C):
Bestemt enkel godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave)
C.Angell og B.E.Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelliste

Sensurdato: Seinest 5. sep. 2011

Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen.

I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Noen generelle merknader:
- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
- Metall er synonymt med elektrisk leder. Isolator er synonymt med dielektrikum.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.
- Dersom ikke annet er oppgitt
  - antas det at systemet er i elektrostatisk likevekt,
  - er "potensial" underforstått "elektrostatisk potensial" og tilsvarende for "potensiell energi",
  - er nullpunkt for elektrostatisk potensial og potensiell energi valgt uendelig langt borte,
  - er Q, ρ og σ (uten indeks) fri ladning.

I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**

Svar på flervalgsspørsmål skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende dette:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Svar:										

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 30 %)

a) En parallellplatekondensator har luft mellom platene og er ladd opp til 500 V med spenningsforsyningen frakopla. Et plastmateriale med relativ permittivitet 5,0 føres inn mellom platene og fyller det meste av rommet. Energien på kondensatorplatene vil da

A) øke
B) avta
C) ikke endres
D) bli null
E) opplysninger mangler for å kunne svare på spørsmålet

b) Hvis et dielektrisk materiale blir satt inn mellom platene i en parallellplatekondensator når den er forbundet til en spenningsforsyning på 100 V, vil

A) spenningen over kondensatoren avta
B) elektrisk felt mellom platene avta
C) elektrisk felt mellom platene øke
D) ladningen på kondensatoren avta
E) ladningen på kondensatoren øke

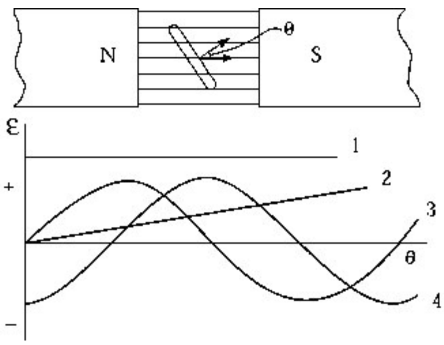
c) To kuler, 1 og 2, har like stor radius R og like stor ladning Q. Kulene vekselvirker ikke med hverandre. Kule 1 har ladningen jamt fordelt utover overflata, mens kule 2 har ladningen jamt fordelt utover heile volumet. Kule 1 har potensiell energi U_1, mens kule 2 har potensiell energi U_2. Finn det riktige svaret!

A) $U_1 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$ og $U_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$
B) $U_1 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$ og $U_2 = \frac{1}{20\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$
C) $U_1 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$ og $U_2 = \frac{1}{10\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$
D) $U_1 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$ og $U_2 = \frac{3}{20\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$
E) $U_1 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$ og $U_2 = \frac{3}{40\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$

d) Ei kompassnål befinner seg i et homogent magnetisk felt med dens sydpol pekende i positiv retning av $\vec{B}$. Nettokrafta på kompassnåla

A) virker i samme retningen som $\vec{B}$.
B) virker i retning rett vinkel med $\vec{B}$.
C) virker i retning rett vinkel med planet gjennom $\vec{B}$ og kompassnåla.
D) virker i motsatt retning av $\vec{B}$.
E) er lik null.

e) En enkel generator består av en rektangulær strømsløyfe som roterer i retning mot klokka mellom to magnetiske poler som vist i figuren. Vinkelen mellom magnetfeltet og normalen til strømsløyfa er θ. Grafen viser ulike kurver for ems'en $\mathcal{E}$ som funksjon av θ med $\theta = 0$ i origo. Hvilken av kurvene representerer $\mathcal{E}$ riktig?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) Ingen av kurvene

f) Et elektron med masse m_e og ladning $-e$ befinner seg i et uniformt magnetfelt $\vec{B} = B_0\,\hat{\mathbf{j}}$. Ved tidspunktet $t = 0$ har elektronet hastighet $\vec{v} = v_0\,\hat{\mathbf{i}} + v_0\,\hat{\mathbf{j}}$. Hva slags bevegelse får elektronet?

A) Sirkelbevegelse med radius $m_e v_0/eB_0$
B) Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2}m_e v_0/eB_0$
C) Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2}m_e/eB_0$
D) Heliksbevegelse med radius $m_e v_0/eB_0$
E) Heliksbevegelse med radius $\sqrt{2}m_e v_0/eB_0$

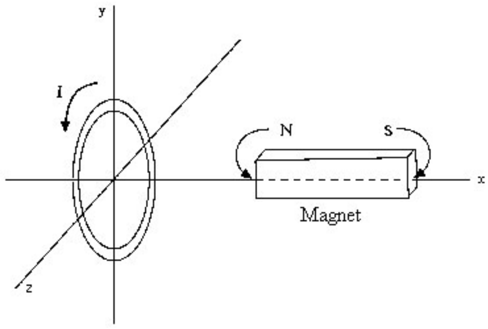
g) Maxwell generaliserte Amperes lov slik at den inkluderer forskyvningsstrøm, og loven lyder da

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\,.$$

I denne likningen er forskyvningsstrømmen definert

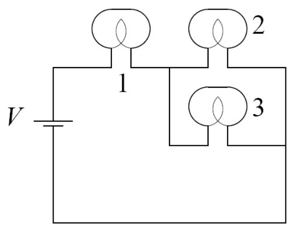
A) $I + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$
B) I
C) $\epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right)\,\mathrm{d}t$
D) $\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$
E) $\epsilon_0 \Phi_E$

h) En kopperring ligger i yz-planet som vist. Magnetens langakse N-S ligger langs x-aksen. Strøm i ringen indusert pga. magneten, har retning som vist i figuren.



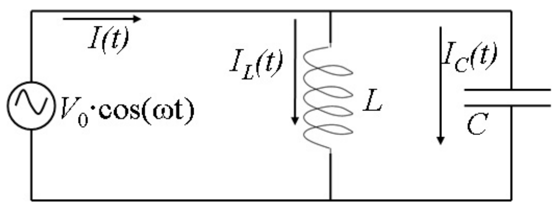
A) Magneten må bevege seg bort fra ringen.
B) Magneten må bevege seg mot ringen.
C) Magneten må bevege seg hverken fra eller mot ringen.
D) Det er ikke nødvendig at magneten beveger seg.
E) Magneten må holdes i ro for å opprettholde strømmen.

i) Tre identiske lyspærer, hver med motstand R er koplet til et batteri med spenning V. Vi antar at pærenes motstand R ikke avhenger av strømmen gjennom dem og at de tåler store strømmer. Hva skjer med lysstyrken i pære nummer 3 hvis vi skrur ut pære nummer 2?



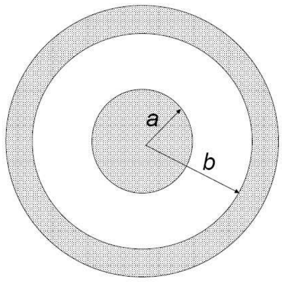
A) Pære nr. 3 lyser sterkere.
B) Pære nr. 3 lyser svakere.
C) Pære nr. 3 slokker.
C) Pære nr. 3 lyser like sterkt som før.
E) Pære nr. 3 vil eksplodere.

j) Kretsen i figuren består av en vekselspenningskilde og en parallellkopling av en induktans og en kondensator. Strøm i de tre ulike greiner er angitt. Strømmenes amplityder varierer med endring av frekvensen, ω, på spenningskilden. Hvilken av de følgende påstander er sann?



A) $I_L(t)$ har maksimal amplityde ved $\omega = \sqrt{1/(LC)}$
B) $I_L(t)$ har minimal amplityde ved $\omega = \sqrt{1/(LC)}$
C) $I(t)$ har maksimal amplityde ved $\omega = \sqrt{1/(LC)}$
D) $I(t)$ har minimal amplityde ved $\omega = \sqrt{1/(LC)}$
E) $I_C(t)$ har maksimal amplityde ved $\omega = \sqrt{1/(LC)}$

Oppgave 2. Elektrostatikk (teller 25 %)



En sylinderkondensator (koaksialkabel) består av en innerleder med radius a og en ytterleder med indre radius b, som vist i figuren. Tykkelsen av ytterlederen har ingen betydning. Lengden (ℓ) av kondensatoren er så stor at vi kan se bort fra effekter nær endene. Innerlederen og ytterlederen har henholdsvis elektrisk ladning per lengdeenhet lik $+\lambda$ og $-\lambda$. Volumet mellom lederne har permittivitet ϵ_0 og er i oppgavens del a) - c) ladningsfritt.

a) Den elektriske feltstyrken $\vec{E}(r)$ kan uttrykkes

$$\vec{E}(r) = \vec{A}/r$$

der konstanten $\vec{A}$ kan ha ulike verdier for ulike deler av rommet. Finn $\vec{A}$ for alle deler av rommet (dvs. for alle r).

b) Ytterlederen har potensial $V(b) = 0$. Finn potensialet $V(a)$ for innerlederen.

c) Finn den lagrede elektrostatiske energien U' per lengdeenhet.

Volumet mellom lederne fra a til b fylles nå med en romladning $\rho(r)$, slik at potensialet mellom lederne ikke lenger er som ovenfor, men gitt av:

$$V(r) = V_0 \frac{b-r}{b-a}\,.$$

Potensialet varierer altså lineært fra $V(a) = V_0$ til $V(b) = 0$. Mellomrommet fra a til b har fortsatt permeabilitet ϵ_0. Ladning per lengdeenhet på ytterleder og innerleder er nå ikke gitt (og du trenger heller ikke bestemme disse).

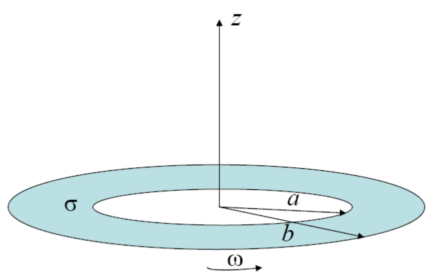
d) Bruk f.eks. formler på siste to sider til å finne uttrykk for den elektriske feltstyrken $E(r)$ mellom lederne og romladninga $\rho(r)$ mellom lederne.

Oppgave 3. (teller 17 %)

Ei sirkulær skive ligger i xy-planet med sentrum i origo. Skiva er svært tynn i z-retning og har indre radius a og ytre radius b. Den har en ladning per flateenhet som varierer med avstanden r fra sentrum:

$$\sigma(r) = \sigma_0\, \frac{b^2}{r^2}\,.$$

Skiva roterer om symmetriaksen (z-aksen) med vinkelhastighet ω.



a) Finn skivas totalladning Q, uttrykt med a, b og σ_0.

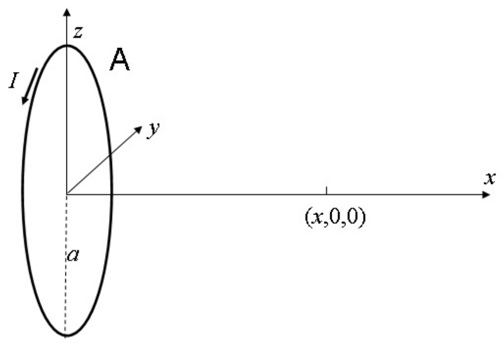
TIPS: Del inn i smale ringer med radius r, bredde dr og ladning dq.

b) Finn uttrykk for skivas magnetiske dipolmoment $\vec{\mu}$.

TIPS: Finn først dipolmomentet d$\vec{\mu}$ til en tynn ring med radius r, bredde dr og strøm dI = dq/T, der $T = 2\pi/\omega$ er tida skiva bruker på en omdreining (dvs. perioden).

Oppgave 4. (teller 20 %)

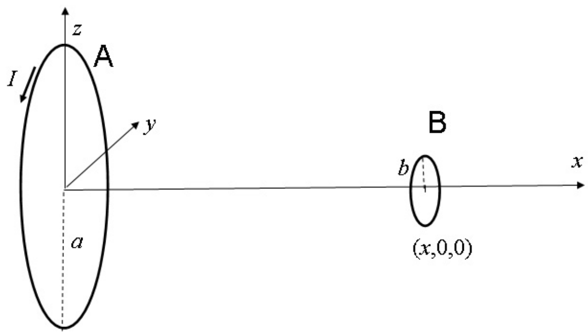
a) Ei sirkelformet strømsløyfe A med radius a fører strømmen I. Sirkelen har sentrum i origo og ligger normalt på x-aksen. Strømretningen er som vist i figuren med retning nedover i den delen av sirkelen som vender mot oss.



Bruk Biot-Savarts lov til å vise at $\vec{B}$-feltet på x-aksen i et punkt $(x, 0, 0)$ i størrelse og retning er gitt ved

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \,\hat{\mathbf{i}} \,.$$

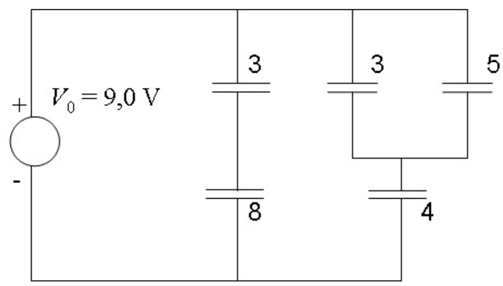
b) Ei anna sirkulær sløyfe B med radius b har sentrum i $(x, 0, 0)$ og er også normal på x-aksen. Vi kaller nå strømmen i A for I_A, og fra tid $t = 0$ til $t_1 = 1,00$ s øker denne jamt (lineært) fra $I_\mathrm{A} = 0$ til $I_\mathrm{A}(t_1) = I_1 = 50$ A.
Størrelser er $a = 0,10$ m, $b = 0,020$ m og $x = 0,20$ m og du kan forutsette at magnetfeltet er homogent innenfor sløyfa B og lik feltet i sentrum.



Bestem indusert strøm I_B i sløyfe B mellom tid $t = 0$ til $t = t_1$ når B har en resistans $R_\mathrm{B} = 1,00 \cdot 10^{-3}\,\Omega$ jamt fordelt over sirkelen. Angi strømretningen.

Oppgave 5. (teller 8 %)

I figuren er spenningen over kondensatorkretsen $V_0 = 9,00$ V (konstant). Tallet ved hver kondensator angir kapasitansen i μF.



a) Hva er spenningen over 4 μF-kondensatoren?

b) Hva er ladningen på 5 μF-kondensatoren?

FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

(Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning)

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$ $\qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$ $\qquad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon$ $\qquad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i}$ $\qquad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon$ $\qquad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i}$ $\qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ $\qquad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E$ $\qquad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I_c + \epsilon\frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right)$ $\qquad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I_c + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\qquad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra $-$ til $+$) $\qquad$ Polarisering: $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{V}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = I\vec{A}$ $\qquad$ Magnetisering: $\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}}{V}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E}$ $\qquad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E}$ $\qquad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H}$ $\qquad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H}$ $\qquad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$, $\qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$,

Energi og energitetthet: $U = \frac{1}{2}\iiint V \mathrm{d}q$ $\qquad$ Elektrisk: $u = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}$ $\qquad$ Magnetisk: $u = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \frac{Q}{V}$ $\qquad$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ $\qquad$ Energi: $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\frac{A}{d}$ $\qquad$ Parallellkopling: $C = \sum_i C_i$ $\qquad$ Seriekopling: $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}$ $\qquad$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ $\qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \frac{I}{2\pi r}$ $\qquad$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\frac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI$, $\sigma\vec{E} = \vec{J}$ $\qquad$ Strømtetthet: $\vec{J} = nq\vec{v}_\mathrm{d}$ der $\vec{v}_\mathrm{d} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Induktans: $\mathcal{E} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\qquad \mathcal{E}_2 = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ $\qquad$ Spoler: $L = N\frac{\Phi_B}{I}$ $\qquad U = \frac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluks som er årsak til strømmen.

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x,y,z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
\mathrm{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Sylinderkoordinater (r,ϕ,z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Kulekoordinater (r,θ,ϕ), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$:

$$\oiint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ \mathrm{d}\tau$$

$$\oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\tau &= r^2\ \mathrm{d}r\ \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\ \mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\tau &= r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\ \mathrm{d}r\ \ell
\end{aligned}$$