Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

BOKMÅL

EKSAMEN
i
TFY4155/FY1003
ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Eksamensdato: Tirsdag 22. mai 2012
Eksamenstid: 09:00 - 13:00

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk, Arne Mikkelsen, tlf. 486 05 392 / 7359 3433
Tillatte hjelpemidler (kode C):

Bestemt enkel godkjent kalkulator.
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelark.

Sensurdato: Innen 13. juni 2012.

Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen. I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Noen generelle merknader:
- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
- Metall er synonymt med elektrisk leder. Isolator er synonymt med dielektrikum.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.
- Dersom ikke annet er oppgitt
  - antas det at systemet er i elektrostatisk likevekt,
  - er "potensial" underforstått "elektrostatisk potensial" og tilsvarende for "potensiell energi",
  - er nullpunkt for elektrostatisk potensial og potensiell energi valgt uendelig langt borte,
  - er Q, ρ og σ (uten indeks) fri ladning.

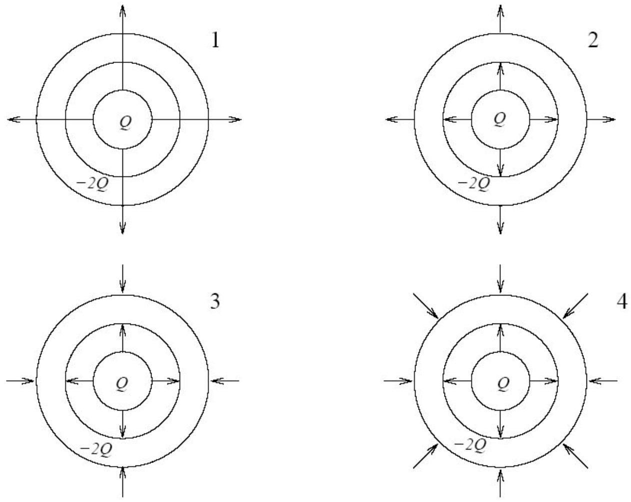
I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**

Svar på flervalgsspørsmål i Oppgave 1 skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende den følgende:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Mitt svar:											

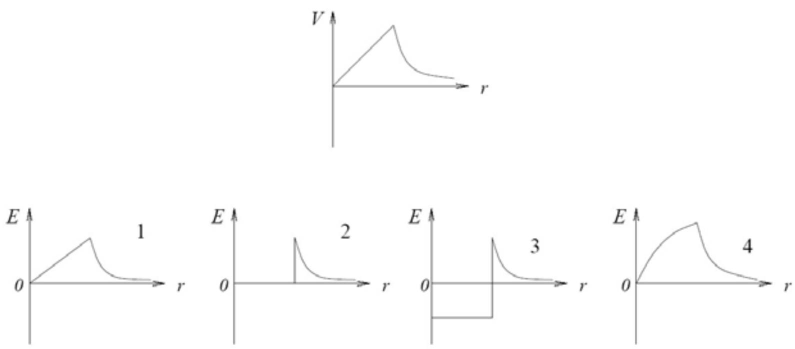
Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 30%)

a) Figuren viser ei metallkule med netto positiv ladning Q omgitt av først et luftlag, deretter et tykt metallisk kuleskall med netto ladning $-2Q$. Hvilken figur angir da korrekt feltlinjer for $\vec{E}$?



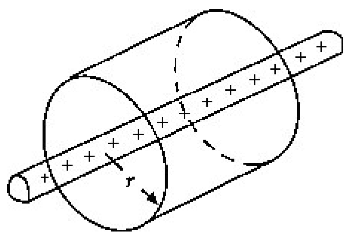
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) Ingen av figurene

b) Hvis det elektriske potensialet V som funksjon av r er som vist i den øverste grafen, hvilken graf viser da den elektriske feltstyrken E som funksjon av r?



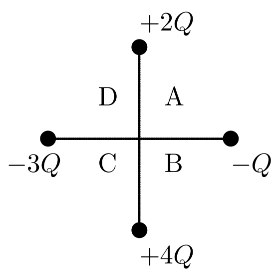
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) Både 2 og 3 kan være riktig, avhengig av referansepunkt.

c) En uendelig lang stav plassert i vakuum har en ladning $\lambda(= q/\ell)$ per lengdeenhet. Gauss' lov gjør det enkelt å bestemme det elektriske feltet i en avstand r fra staven. Med $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ er feltet



A) $k\lambda/r^2$
B) $k\lambda/r$
C) $4\pi k\lambda/r$
D) $2k\lambda/r$
E) $2\pi\, k\lambda/r^2$

d) Hvis en positiv ladning $+Q$ blir plassert i origo i figuren (i kryssingspunktet mellom vertikal og horisontal linje), mot hvilken kvadrant vil den føle ei netto kraft?



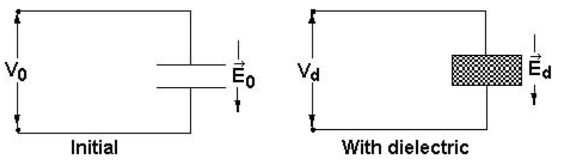
A) A
B) B
C) C
D) D
E) Ingen, krafta er null

e) Spenningen over hver kondensator i en seriekopling av kondensatorer er

A) proporsjonal med kondensatorens kapasitans
B) omvendt proporsjonal med kondensatorens kapasitans
C) uavhengig av kondensatorens kapasitans
D) lik
E) ingen av disse er rett

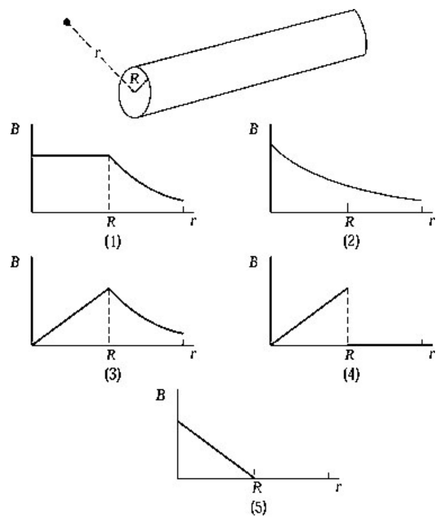
f) En ladd kondensator har initielt et elektrisk felt E_0 mellom platene og en spenning V_0 over platene. Uten å kople til noen spenningskilde, setter du inn et dielektrikum ($\epsilon_{\mathrm{r}} > 1$) mellom platene. Det elektrisk feltet og spenningen over platene blir nå respektiv E_{d} og V_{d}. Hvilke av følgende er rett for det elektriske feltet og for spenningen?

A) $E_{\mathrm{d}} > E_0$ og $V_{\mathrm{d}} > V_0$
B) $E_{\mathrm{d}} = E_0$ og $V_{\mathrm{d}} > V_0$
C) $E_{\mathrm{d}} > E_0$ og $V_{\mathrm{d}} = V_0$
D) $E_{\mathrm{d}} < E_0$ og $V_{\mathrm{d}} > V_0$
E) $E_{\mathrm{d}} < E_0$ og $V_{\mathrm{d}} < V_0$



g) En ledning med radius R fører en strøm I som er uniformt fordelt over dets tverrsnitt. Grafen som best representerer magnetfeltet $B(r)$ som funksjon av avstanden fra sentrum av ledningen er

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



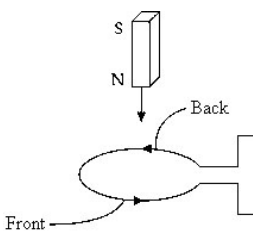
h) Hvor mange av disse størrelsene er en vektorstørrelse:

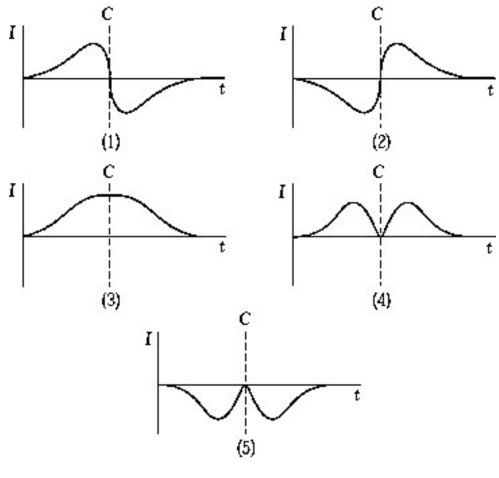
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

elektrisk strøm,
elektrisk ladning,
elektrisk felt,
elektrisk potensial,
magnetisk fluks,
magnetisk moment.

i) En stavmagnet slippes gjennom ei strømsløyfe som vist i venstre del av figuren under. Pilene i sløyfa viser valgt positiv strømretning. Husk at magnetiske feltlinjer går ut fra nordpol og inn mot sørpol på en magnet. Strømmen I som funksjon av tida t når magneten faller gjennom sløyfa er illustrert kvalitativt med hvilken graf? (Tidspunktet som midtpunktet av magneten passerer sløyfa er vist med linja C.)

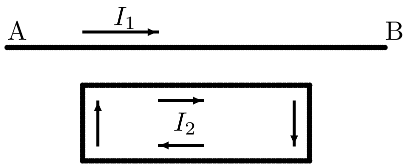
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5





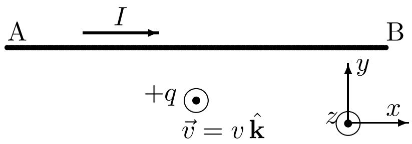
j) En lang, rett ledning AB fører en strøm I_1 mot høyre. Den rektangulære strømsløyfa har langsidene parallell med AB og fører en strøm I_2 i retning med klokka. Hva er retningen på netto magnetisk kraft på den rektangulære strømsløyfa pga. strømmen I_1 i leder AB?

A) mot høyre
B) mot venstre
C) opp (mot AB)
D) ned (bort fra AB)
E) villedende spørsmål, krafta er null



k) En lang, rett ledning langs x-aksen fører en strøm i positiv x-retning. En positiv punktladning beveger seg langs z-aksen i positiv z-retning (opp av papirplanet). Den magnetiske krafta som ledningen utøver på punktladningen når den er i posisjonen vist i figuren (i papirplanet) har retning

A) positiv x-retning
B) negativ z-retning
C) positiv y-retning
D) negativ y-retning
E) krafta er null



Oppgave 2. Gauss lov. (teller 12 %)

En sfærisk symmetrisk ladningsfordeling har en romladningstetthet $\rho(r)$ gitt ved:

$$\rho(r) = \begin{cases} 2\rho_0\,(R/r - 1) & \text{for} \quad r \in [0, R\rangle \\ 0 & \text{for} \quad r \in [R, \infty\rangle \end{cases}$$

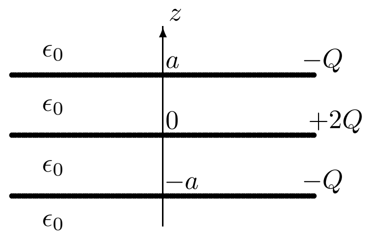
der ρ_0 er en konstant. Ladningen er altså samla innenfor ei kule med radius R, og r er avstand fra sentrum av kula. Permittiviteten er overalt ϵ_0.

a) Finn kulas totalladning Q gitt ved ρ_0 og R.

b) Bruk Gauss' lov til å finne det elektriske feltet $\vec{E}$ som funksjon av r for alle verdier av r, uttrykt ved bl.a. ρ_0 og R.

Oppgave 3. Kapasitans og potensial. (teller 20 %)

a) Tre parallelle og tynne metallplater er plassert normalt på z-aksen i posisjoner $z = -a$, $z = 0$ og $z = a$ som vist i figuren. Platene har areal A og uniform ladning $-Q, +2Q, -Q$. Permittiviteten er ϵ_0. Platene er store i forhold til avstand a, slik at du kan se bort fra endeeffekter og anta at elektrisk felt fra ei enkeltplate er $\sigma/(2\epsilon_0)$ til begge sider.

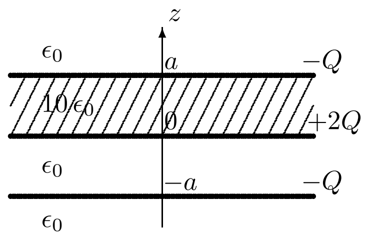


Finn uttrykk for det elektriske feltet $\vec{E}(z) = E(z)\,\hat{\mathbf{k}}$ på z-aksen for alle verdier av z.

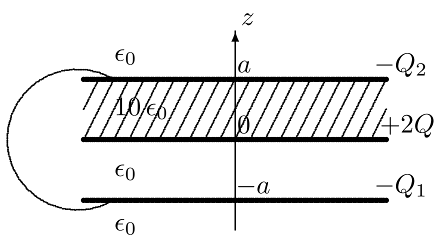
I de følgende oppgavene er referanse for potensialet på nederste plata, dvs. $V(-a) = 0$.

Har du ikke funnet svar i a), eller er usikker på svaret, kan du bruke $\vec{E} = E_0\,\hat{\mathbf{k}}$ mellom øvre og midtre plan og $\vec{E} = -E_0\,\hat{\mathbf{k}}$ mellom midtre og nedre plan i de følgende oppgavene.

b) Finn uttrykk for potensialene $V(0)$ og $V(a)$ på henholdsvis den midtre og den øverste plata.



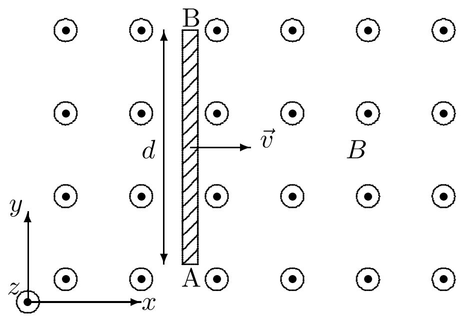
c) Volumet mellom den midtre og den øverste plata fylles med ei dielektrisk skive med relativ permittivitet $\epsilon_r = 10$ mens ladningene beholdes uendra. Hva blir nå potensialet $V(a)$ på den øverste plata?



d) Øverste og nederste plate i c) forbindes med en tynn elektrisk leder. Bestem resulterende ladning $-Q_1$ og $-Q_2$ på henholdsvis den nederste og den øverste plata. (Du kan anta at den tynne lederen som forbinder de to platene ikke har netto ladning.)

Oppgave 4. Induksjon. (teller 13 %)

Ei metallstang A-B med lengde d = 0,20 m befinner seg i et homogent magnetfelt. B-feltet peker i z-retning opp av papirplanet og har styrke B = 1,50 T.



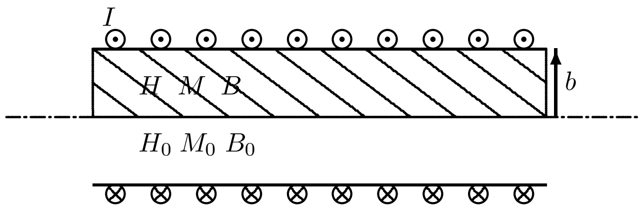
a) Finn indusert elektromotorisk spenning mellom de to ytterpunktene A og B i stanga når stanga forflyttes med en hastighet v = 2,00 m/s i x-retning. Hvilken ende er positiv?

b) Istedenfor translasjonbevegelse i x-retning roterer stanga om det ene endepunktet A. Rotasjonen er i xy-planet i retning mot klokka, dvs. rotasjonsvektor $\vec{\omega}$ er parallell med $\hat{\mathbf{k}}$. Stanga er hele tida innenfor det homogene magnetfeltet. Finn størrelsen på indusert elektromotorisk spenning mellom de to ytterpunktene A og B i stanga når stanga roterer med en frekvens 5,0 omdreininger per sekund.

Oppgitt fra mekanikken: $v = \omega\, r = 2\pi f r$.

Oppgave 5. Magnetisk materiale. (teller 15 %)

a) Forklar (definer) størrelsen magnetisering $\vec{M}$ i magnetisk materiale. Utdyp forklaringen med å beregne metningsmagnetiseringen M_s i et materiale av jern med atom(antalls)tetthet $n_a = 1,68 \cdot 10^{29}\,\text{m}^{-3}$ og der hvert atom i gjennomsnitt har et magnetisk moment $\mu_a = 9,3 \cdot 10^{-24}\,\text{Am}^2$. Anta at ved metning er alle atomære magnetiske moment retta samme retning.

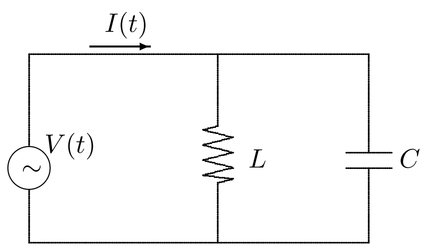


Figuren viser en solenoide med radius $b = 30$ mm og viklingstall $n = 800\,\text{m}^{-1}$. Antall viklinger er altså mye større enn 10 som er brukt i figuren. Strømmen $I = 3{,}50$ A. Et jernmateriale med oppgitt relativ permeabilitet $\mu_r = 2000$ fyller halve solenoiden, resten er luftfylt. Jernmaterialet er av samme type som det er gitt data for i oppgave a). Senteraksen til solenoiden er i figuren vist med halvstiplet linje.
Du kan anta solenoiden er svært lang slik at du kan se bort fra randeffekter og anta null felt utenfor solenoiden.

b) Bruk Amperes lov (med integrasjonsveg lik et høvelig rektangel) til å finne verdier for den magnetiske feltstyrken H_0 og H i henholdsvis den luftfylte delen av solenoiden og den jernfylte delen av solenoiden. Angi retningen.

c) Finn verdier for M_0 og B_0 i den luftfylte delen av solenoiden, og finn de samme M og B i den jernfylte delen av solenoiden. Angi retningen for alle størrelsene.

Oppgave 6. Vekselstrømskrets. (teller 10 %)



Kretsen i figuren består av en veksel(AC)spenningskilde med amplityde V_0 og frekvens ω og en parallellkopling av en induktans L og en kapasitans C.

- Ved AC-signal, hvordan uttrykkes vanligvis spenning $V(t)$ og strøm $I(t)$ på kompleks form?

- Sett opp uttrykk for kretsens komplekse impedans og finn herfra et uttrykk for den reelle strømamplityden $|I_0|$ til strømmen $I(t)$.

FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning.
I og $\vec{J}$ uten indeks er ledningsstrøm (conducting current), I_d og $\vec{J}_\mathrm{d}$ er forskyvningsstrøm (displacement current).

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12}$ $\quad \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$ $\quad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon$ $\quad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i}$ $\quad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\quad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i}$ $\quad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ $\quad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E$ $\quad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I + \epsilon\dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right)$ $\quad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\quad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\quad \mathrm{div}\vec{B} = 0$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Forskyvningsstrøm: $I_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\quad \vec{J}_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra $-$ til $+$) $\quad$ Polarisering: $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}}{\text{volum}}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = \vec{m} = I\vec{A}$ $\quad$ Magnetisering: $\vec{M} = \dfrac{\sum \vec{\mu}}{\text{volum}}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E}$ $\quad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E}$ $\quad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H}$ $\quad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H}$ $\quad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\displaystyle\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$, $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$, $\quad$ Relativt ∞: $V(r) = \displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon r}$

Energi og energitetthet: $U = \dfrac{1}{2}\iiint V\mathrm{d}q$ $\quad$ Elektrisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ $\quad$ Magnetisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \dfrac{Q}{V}$ $\quad$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ $\quad$ Energi: $U = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\dfrac{A}{d}$ $\quad$ Parallellkopling: $C = \displaystyle\sum_i C_i$ $\quad$ Seriekopling: $\dfrac{1}{C} = \displaystyle\sum_i \dfrac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}$ $\quad$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ $\quad \mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \dfrac{I}{2\pi r}$ $\quad$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\dfrac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI\,,\quad R = \rho\dfrac{\ell}{A} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\ell}{A}\,;\qquad P = VI$

$\sigma\vec{E} = \vec{J}$, der strømtetthet $= \vec{J} = nq\vec{v}_\mathrm{d}$ og $\vec{v}_\mathrm{d} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Induktans: $\mathcal{E} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \mathcal{E}_2 = -M_{21}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t},\quad M_{21} = M_{12}$ Spoler: $L = N\dfrac{\Phi_B}{I} \qquad U = \dfrac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluksen som er årsak til strømmen.

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x,y,z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
\mathrm{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Sylinderkoordinater (r,ϕ,z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

Kulekoordinater (r,θ,ϕ), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$:

$$
\oiint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ \mathrm{d}\tau
$$

$$
\oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{A}
$$

Infinitesimale volumelement:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\tau &= r^2\ \mathrm{d}r\ \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\ \mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\tau &= r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\ \mathrm{d}r\ \ell
\end{aligned}
$$