Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

KONTINUASJONSEKSAMEN
i
TFY4155/FY1003
ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Eksamensdato: Torsdag 16. august 2012
Eksamenstid: 09:00 - 13:00

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk, Arne Mikkelsen, tlf. 7359 3433 / 486 05 392
Tillatte hjelpemidler (kode C):
Bestemt enkel godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave)
C.Angell og B.E.Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelliste

Sensurdato: Seinest 6. sep. 2012.

Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen.

I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Noen generelle merknader:
- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
- Metall er synonymt med elektrisk leder. Isolator er synonymt med dielektrikum.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.
- Dersom ikke annet er oppgitt
  - antas det at systemet er i elektrostatisk likevekt,
  - er "potensial" underforstått "elektrostatisk potensial" og tilsvarende for "potensiell energi",
  - er nullpunkt for elektrostatisk potensial og potensiell energi valgt uendelig langt borte,
  - er Q, ρ og σ (uten indeks) fri ladning.

I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**

Svar på flervalgsspørsmål skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende dette:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Svar:										

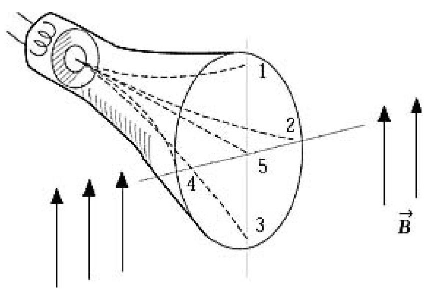
Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 25 %)

a) En parallellplatekondensator har luft mellom platene og er ladd opp til 500 V med spenningsforsyningen frakopla. Et plastmateriale med relativ permittivitet 5,0 føres inn mellom platene og fyller det meste av rommet. Energien på kondensatorplatene vil da
A) øke
B) avta
C) ikke endres
D) bli null
E) opplysninger mangler for å kunne svare på spørsmålet

b) Potensialet på et uendelig stort positivt ladd plan er +20 V. Planet har en uniform ladningstetthet +2 nC/m^2. I hvilken avstand fra planet er da $V = 0$?
A) ∞ (uendelig)
B) V er alltid positiv
C) 9 cm
D) 18 mm
E) 18 cm

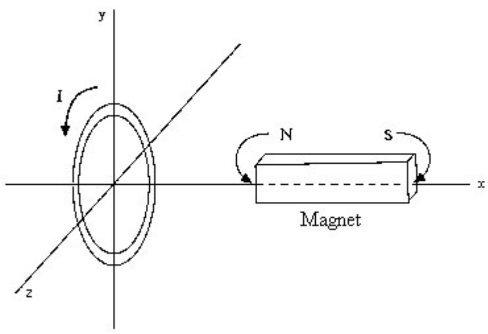
c) Ei kompassnål befinner seg i et homogent magnetisk felt med dens sydpol pekende i positiv retning av $\vec{B}$. Nettokrafta på kompassnåla
A) virker i samme retningen som $\vec{B}$.
B) virker i retning rett vinkel med $\vec{B}$.
C) virker i retning rett vinkel med planet gjennom $\vec{B}$ og kompassnåla.
D) virker i motsatt retning av $\vec{B}$.
E) er lik null.

d) Et katodestrålerør er plassert horisontalt i et homogent magnetisk felt som har retning vertikalt opp. Elektronene som emitteres fra katoden vil på veg mot overflata følge hvilken av de angitte veger?



A) 1 (bøyes oppover)
B) 2 (bøyes mot venstre)
C) 3 (bøyes nedover)
D) 4 (bøyes mot høyre)
E) 5 (rett fram)

e) En kopperring ligger i yz-planet som vist. Magnetens langakse N-S ligger langs x-aksen. Strøm i ringen indusert pga. magneten, har retning som vist i figuren.



A) Magneten må bevege seg bort fra ringen.
B) Magneten må bevege seg mot ringen.
C) Magneten må bevege seg hverken fra eller mot ringen.
D) Det er ikke nødvendig at magneten beveger seg.
E) Magneten må holdes i ro for å opprettholde strømmen.

f) Maxwell generaliserte Amperes lov slik at den inkluderer forskyvningsstrøm, og loven lyder da

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \, .$$

I denne likningen er forskyvningsstrømmen definert

A) $I + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$

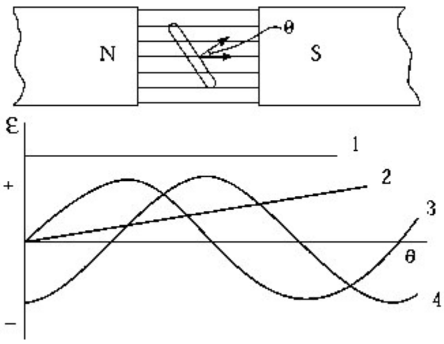
B) I

C) $\epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) \mathrm{d}t$

D) $\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$

E) $\epsilon_0 \Phi_E$

g) En enkel generator består av en rektangulær strømsløyfe som roterer i retning mot klokka mellom to magnetiske poler som vist i figuren. Vinkelen mellom magnetfeltet og normalen til strømsløyfa er θ. Grafen viser ulike kurver for ems'en $\mathcal{E}$ som funksjon av θ med $\theta = 0$ i origo. Hvilken av kurvene representerer $\mathcal{E}$ riktig?



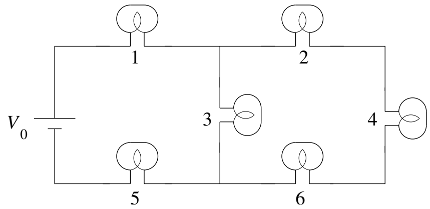
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) Ingen av kurvene

h) En tett viklet solenoide er 15 cm lang, har 350 viklinger, fører en strøm 3,0 A og har en aluminiumskjerne med $\chi_\mathrm{m} = 2,3 \cdot 10^{-5}$. Hvis du ser bort fra endeeffekter, vil du finne at verdien til magnetisk flukstetthet B i sentrum er omtrentlig

A) 8,80 mT
B) 8,80 mA/m
C) 7000 mT
D) 202 mA/m
E) 0,0 mT

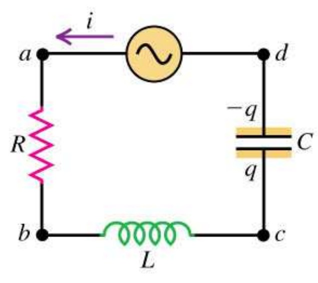
i) Hver av de seks lyspærene i figuren nedenfor kan betraktes som en ideell ohmsk motstand R. Økt spenning over ei lyspære (og dermed økt strømstyrke) gir økt lysstyrke i lyspæra. Hva skjer med lysstyrken i pære 1 dersom pære 3 skrus ut?

A) Uendra
B) Lyser svakere
C) Lyser sterkere
D) Slokker
E) Pæra eksploderer

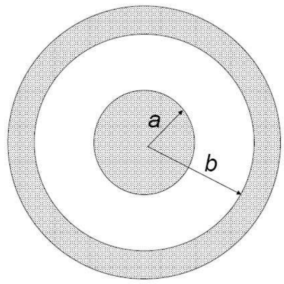


j) Kretsen i figuren består av en vekselspenningskilde (AC) og en seriekopling av en resistor, induktans og en kondensator med endelige verdier. Når kildens frekvens er lik kretsens resonansfrekvens, er kretsens impedans

A) maksimum
B) minimum, men ikke null
C) null
D) hverken maksimum eller minimum
E) det er ikke nok informasjon til entydig svar.



Oppgave 2. (teller 16 %)



En sylinderkondensator (koaksialkabel) består av en innerleder med radius a og en ytterleder med indre radius b, som vist i figuren. Tykkelsen av ytterlederen har ingen betydning. Lengden (ℓ) av kondensatoren er så stor at vi kan se bort fra effekter nær endene. Innerlederen og ytterlederen har henholdsvis elektrisk ladning per lengdeenhet lik $+\lambda$ og $-\lambda$. Volumet mellom lederne har permittivitet ϵ_0. I oppgavens del a) er dette rommet ladningsfritt mens det i b) har ladninger som beskrevet.

a) Bruk Gauss' lov til å finne det elektriske feltet $\vec{E}$ som funksjon av r for alle verdier av r, uttrykt ved bl.a. λ og ϵ_0.

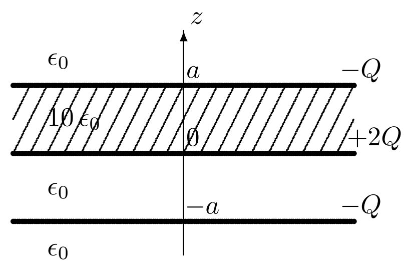
Volumet mellom lederne fra a til b fylles nå med en romladning $\rho(r)$, slik at potensialet mellom lederne er gitt av:

$$V(r) = V_0 \frac{b-r}{b-a}\,.$$

Potensialet varierer altså lineært fra $V(a) = V_0$ til $V(b) = 0$. Mellomrommet fra a til b har fortsatt permeabilitet ϵ_0. Ladning per lengdeenhet på ytterleder og innerleder er nå ikke gitt (og du trenger heller ikke bestemme disse).

b) Bruk f.eks. formler på siste to sider til å finne uttrykk for den elektriske feltstyrken $\vec{E}(r)$ mellom lederne og romladninga $\rho(r)$ mellom lederne.

Oppgave 3. (teller 20 %)



Tre parallelle og tynne metallplater er plassert normalt på z-aksen i posisjoner $z = -a$, $z = 0$ og $z = a$ som vist i figuren. Platene har areal A og uniform ladning $-Q, +2Q, -Q$ og benevnes (-a), (0) og (a) etter deres plassering. Rommet mellom plate (-a) og (0) er fylt av luft med permittivitet ϵ_0. Rommet mellom plate (0) og (a) er fylt av et dielektrisk materiale med relativ permittivitet $\epsilon_r = 10$.

Platene er store i forhold til avstand a, slik at du kan se bort fra endeeffekter og dermed anta at D-felt og E-felt er homogent mellom platene og null utenfor kanten av platene.

Referanse for det elektrisk potensialet legges på nederste plate (-a), dvs. $V(-a) = 0$.

a) Finn uttrykk for elektrisk flukstetthet $\vec{D}(z) = D(z)\,\hat{\mathbf{k}}$ og elektrisk feltstyrke $\vec{E}(z) = E(z)\,\hat{\mathbf{k}}$ på z-aksen for alle verdier av z.

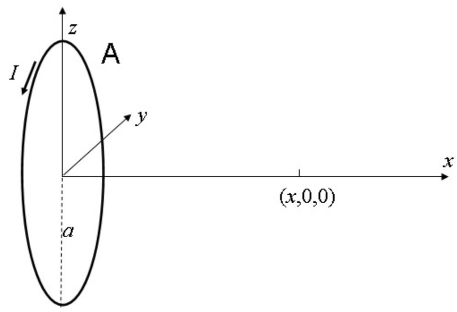
Har du ikke funnet svar i a), eller er usikker på svaret, kan du bruke $\vec{E}(z) = -E_1\,\hat{\mathbf{k}}$ mellom plate (-a) og (0) og $\vec{E} = E_2\,\hat{\mathbf{k}}$ mellom plate (0) og (a) i de følgende oppgavene. E_1 og E_2 er positive størrelser.

b) Finn uttrykk for potensialene $V(0)$ og $V(a)$ på henholdsvis plate (0) og plate (a).

c) Finn uttrykk for total potensiell energi for de tre ladde platene.

Oppgave 4. **(teller 18 %)**

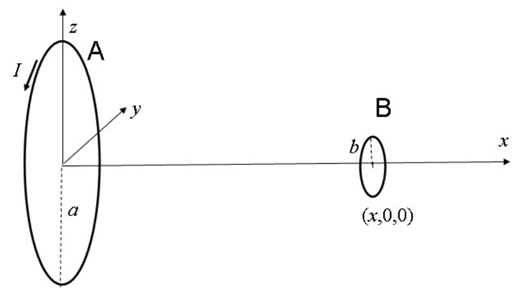
a) Ei sirkelformet strømsløyfe A med radius a fører strømmen I. Sirkelen har sentrum i origo og ligger normalt på x-aksen. Strømretningen er som vist i figuren med retning nedover i den delen av sirkelen som vender mot oss.



Bruk Biot-Savarts lov til å vise at $\vec{B}$-feltet på x-aksen i et punkt $(x,0,0)$ i størrelse og retning er gitt ved

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} \,\hat{\mathbf{i}} \,.$$

b) Ei anna sirkulær sløyfe B med radius b har sentrum i $(x,0,0)$ og er også normal på x-aksen. Vi kaller nå strømmen i A for I_A, og fra tid $t=0$ til $t_1 = 1,00$ s øker denne jamt (lineært) fra $I_\mathrm{A} = 0$ til $I_\mathrm{A}(t_1) = I_1 = 50\,\mathrm{A}$.

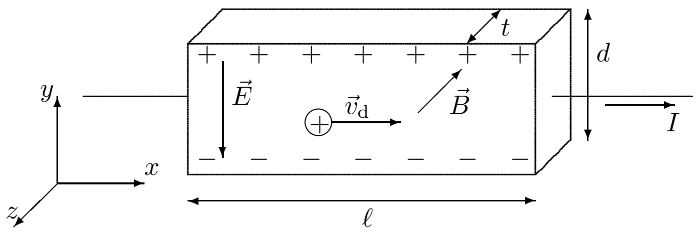


Størrelser er $a = 0,10$ m, $b = 0,020$ m og $x = 0,20$ m og du kan forutsette at magnetfeltet er homogent innenfor sløyfa B og lik feltet i sentrum.

Bestem indusert strøm I_B i sløyfe B mellom tid $t=0$ til $t=t_1$ når B har en resistans $R_\mathrm{B} = 1,00\cdot 10^{-3}\,\Omega$ jamt fordelt over sirkelen. Angi strømretningen.

Oppgave 5. **(teller 13 %)**

En Hallprobe består av et halvledermateriale og har form som vist i figuren (ikke i skala) med lengde $\ell = 40$ mm, tykkelse $t = 0,15$ mm og høyde $d = 20$ mm. Strømmen I føres i lengderetning og kan antas fordelt med homogen strømtetthet J over ledertverrsnittet $A = d\cdot t$. Halvledermaterialet har positive ladningsbærere $q = +e$ og med ladningstetthet $n = 5\cdot 10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}$.



Proben brukes til å måle styrken på et magnetfelt B som antas homogent og rettet i $-z$-retning i koordinatsystemet vist i figuren. Figuren gir også noen flere nyttige opplysninger.

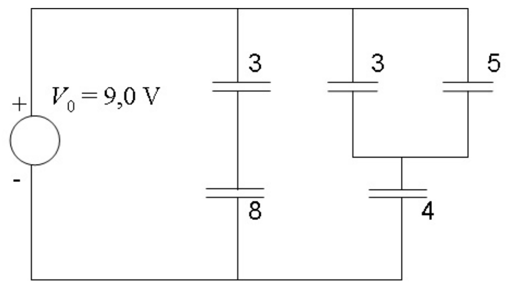
a) Med grunnlag i balanse mellom elektrisk og magnetisk kraft vis at Hallspenningen kan uttrykkes $V_\mathrm{H} = v_\mathrm{d} B d$. Vis klart i figuren hvor Hallspenningen måles.

b) V_H måles til 6,5 V når strømmen er $I = 0{,}15$ A. Hvor stort er magnetfeltet B?

OPPGITT: $J = q\,n\,v_\mathrm{d}$ med v_d lik driftsfart for ladning q.

Oppgave 6. **(teller 8 %)**

I figuren er spenningen over kondensatorkretsen $V_0 = 9{,}00$ V (konstant). Tallet ved hver kondensator angir kapasitansen i μF.



a) Hva er spenningen over 4 μF-kondensatoren?

b) Hva er ladningen på 5 μF-kondensatoren?

FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning.
I og $\vec{J}$ uten indeks er ledningsstrøm (conducting current), I_d og $\vec{J}_\mathrm{d}$ er forskyvningsstrøm (displacement current).

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q_1q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12}$ $\qquad \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q \qquad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon \qquad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i} \qquad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon \qquad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E \qquad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I + \epsilon\dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right) \qquad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Forskyvningsstrøm: $I_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \vec{J}_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra $-$ til $+$) Polarisering: $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}}{\text{volum}}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = \vec{m} = I\vec{A}$ Magnetisering: $\vec{M} = \dfrac{\sum \vec{\mu}}{\text{volum}}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E} \qquad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E} \qquad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H} \qquad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H} \qquad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\displaystyle\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \qquad$ Relativt ∞: $V(r) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon r}$

Energi og energitetthet: $U = \dfrac{1}{2}\iiint V\mathrm{d}q$ Elektrisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ Magnetisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \dfrac{Q}{V}$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ Energi: $U = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\dfrac{A}{d}$ Parallellkopling: $C = \displaystyle\sum_i C_i$ Seriekopling: $\dfrac{1}{C} = \displaystyle\sum_i \frac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \dfrac{I}{2\pi r}$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\dfrac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI\,,\quad R = \rho\dfrac{\ell}{A} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\ell}{A}\,;\quad P = VI$

$\sigma\vec{E} = \vec{J}$, der strømtetthet $= \vec{J} = nq\vec{v}_{\mathrm{d}}$ og $\vec{v}_{\mathrm{d}} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Induktans: $\mathcal{E} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\qquad \mathcal{E}_2 = -M_{21}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t},\quad M_{21} = M_{12}$ Spoler: $L = N\dfrac{\Phi_B}{I}\qquad U = \dfrac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluksen som er årsak til strømmen.

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x, y, z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z}\\
\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\
\mathrm{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Sylinderkoordinater (r, ϕ, z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\phi}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z}\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(D_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}
\end{aligned}$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$:

$$\oiint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\;\,\mathrm{d}\tau$$

$$\oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
\mathrm{d}\tau &= r^2\,\mathrm{d}r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r\\
\mathrm{d}\tau &= r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\ell
\end{aligned}$$