NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i

TFY4155 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk v/Jon Andreas Støvneng,
Tlf.: 454 55 533 / 7359 3663

Eksamensdato: Fredag 9. august 2013
Eksamenstid: 09:00 - 13:00
Tillatte hjelpemidler (kode C):

Bestemt enkel godkjent kalkulator.
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelark.

Annen informasjon:

1. Denne eksamen teller 90 % på endelig karakter, laboratorierapport 10 %. For studenter med laboratorium godkjent 2012 og før teller denne eksamen 100 %.

2. Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen.

3. Noen generelle faglige merknader:
   - Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
   - $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
   - Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

4. I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**
Svar på flervalgsspørsmål i Oppgave 1 skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende den følgende:

	a	b	c	d	e	f	g	h
Mitt svar:								

5. Oppgavene er utarbeidet av Arne Mikkelsen og vurdert av Jon Andreas Støvneng.

Målform/språk: Bokmål.

Antall sider (uten denne framsida): 4.

Antall sider vedlegg: 2.

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 20 %)

a) Hvis et dielektrisk materiale blir satt inn mellom platene i en parallellplatekondensator når den er forbundet til en spenningsforsyning på 100 V, vil

A) spenningen over kondensatoren avta
B) elektrisk felt mellom platene avta
C) elektrisk felt mellom platene øke
D) ladningen på kondensatoren avta
E) ladningen på kondensatoren øke

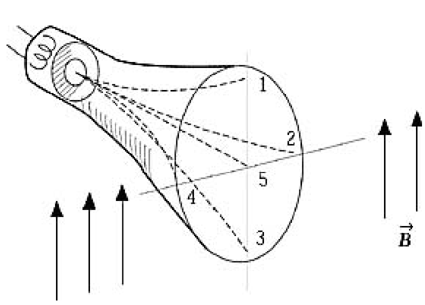
b) Potensialet på et uendelig stort positivt ladd plan er +20 V. Planet har en uniform ladningstetthet +2 nC/m^2. I hvilken avstand fra planet er da $V = 0$?
A) ∞ (uendelig)
B) V er alltid positiv
C) 9 cm
D) 18 mm
E) 18 cm

c) To kuler, 1 og 2, har like stor radius R og like stor ladning Q. Kulene vekselvirker ikke med hverandre. Kule 1 har ladningen jamt fordelt utover overflata, mens kule 2 har ladningen jamt fordelt utover heile volumet. Kule 1 har potensiell energi $U_1 = \dfrac{1}{8\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$, mens kule 2 har potensiell energi U_2 gitt ved:

A) $U_2 = \dfrac{1}{8\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$
B) $U_2 = \dfrac{1}{20\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$
C) $U_2 = \dfrac{1}{10\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$
D) $U_2 = \dfrac{3}{20\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$
E) $U_2 = \dfrac{3}{40\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$

d) Ei kompassnål befinner seg i et homogent magnetisk felt med dens sydpol pekende i positiv retning av $\vec{B}$. Nettokrafta på kompassnåla
A) virker i samme retningen som $\vec{B}$.
B) virker i retning rett vinkel med $\vec{B}$.
C) virker i retning rett vinkel med planet gjennom $\vec{B}$ og kompassnåla.
D) virker i motsatt retning av $\vec{B}$.
E) er lik null.

e) Et katodestrålerør er plassert horisontalt i et homogent magnetisk felt som har retning vertikalt opp. Elektronene som emitteres fra katoden vil på veg mot overflata følge hvilken av de angitte veger?



A) 1 (bøyes oppover)
B) 2 (bøyes mot venstre)
C) 3 (bøyes nedover)
D) 4 (bøyes mot høyre)
E) 5 (rett fram)

f) Maxwell generaliserte Amperes lov slik at den inkluderer forskyvningsstrøm, og loven lyder da

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \, .$$

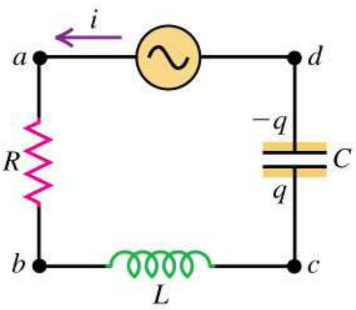
I denne likningen er forskyvningsstrømmen definert

A) $I + \epsilon_0 \dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}$ B) I C) $\epsilon_0 \displaystyle\int \left(\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) \mathrm{d}t$ D) $\epsilon_0 \dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}$ E) $\epsilon_0 \Phi_E$

g) En tett viklet solenoide er 15 cm lang, har 350 viklinger, fører en strøm 3,0 A og har en aluminiumskjerne med magnetisk susceptibilitet $\chi_\mathrm{m} = 2,3 \cdot 10^{-5}$. Hvis du ser bort fra endeeffekter, vil du finne at verdien til magnetisk flukstetthet B i sentrum er omtrentlig

A) 8,80 mT
B) 8,80 mA/m
C) 7000 mT
D) 202 mA/m
E) 0,0 mT

h) Kretsen i figuren består av en vekselspenningskilde (AC) og en seriekopling av en resistor, induktans og en kondensator med endelige verdier. Kretsstrømmen (angitt med i) har en veldig liten amplitude når kilden har en veldig høy frekvens ω. Hvilket kretselement er årsak til dette?



A) Resistansen R
B) Induktansen L
C) Kapasitansen C
D) En kombinasjon av L og C
E) Villedende spørsmål - strømmen har en stadig stigende amplitude når frekvensen er veldig høy.

Oppgave 2. (teller 23 %)

a) Ei metallkule med radius R_1 er tilført en netto ladning Q. Hvorfor vil ladningen fordele seg på kulas overflate og hvorfor er det rimelig å anta den samme flateladningstettheten over hele overflata?

Det elektriske feltet fra kulas overflate og utover ($r \geq R_1$) kan uttrykkes

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, \hat{\mathbf{r}} \, .$$

b) Finn uttrykk for det elektrostatiske potensial $V(r)$ for **alle** r. Referanse for V er i uendelig avstand. Finn også et uttrykk for den totale elektrostatiske energien U av ladningsfordelingen.

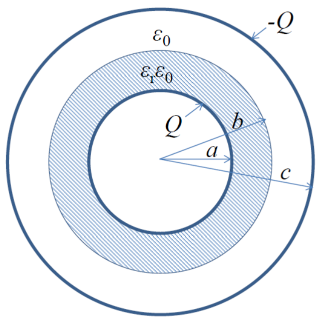
Den samme ladningen Q skal nå fordeles på **to** metallkuler med radier henholdsvis R_1 og R_2. Dvs. $Q = Q_1 + Q_2$ der Q_1 er ladningen på kule 1 og Q_2 ladningen på kule 2. Anta at kulene er så langt fra hverandre at ladningsfordelingen på den ene kula ikke påvirkes av ladningen på den andre kula, og anta at den gjensidige elektrostatiske energien mellom kulene kan neglisjeres.

c) Ladningene Q_1 og Q_2 fordeler seg slik at den **totale** elektrostatiske energien U blir **minst** mulig. Finn ladningene Q_1 og Q_2 uttrykt ved Q, R_1 og R_2.

d) Hva blir spenningen (potensialforskjellen) mellom kulene når ladningen er fordelt på denne måten?

Oppgave 3. (teller 15 %)

En kulekondensator består av to tynne kuleskall av elektrisk ledende materiale med radius henholdsvis a og c (markert med tykke sirkler i figuren). Innerskallet har elektrisk ladning $+Q$ og ytterskallet ladning $-Q$. Rommet mellom $r = a$ og $r = b$ er fylt av et dielektrikum med relativ permittivitet ϵ_r. Mellom $r = b$ og $r = c$ er rommet fylt av luft med permittivitet ϵ_0.



a) Finn uttrykk for den elektriske felstyrken $\vec{E}(r)$ overalt i rommet (alle r).

b) Finn uttrykk for potensialforskjellen mellom kuleskallene a og c.

c) Finn uttrykk for polariseringen $\vec{P}(r)$ overalt i rommet. Angi spesielt retning for $\vec{P}(r)$. Hvilket fortegn har indusert (bundet) overflateladning σ_i i dielektrikumet ved $r = a$?

Oppgave 4. (teller 22%)

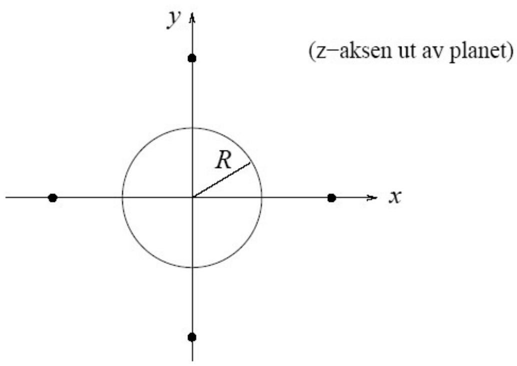
En tilnærmet uendelig lang og rett sylinderformet leder med radius R fører en elektrisk strøm som ikke varierer med tida. Strømtettheten (strøm per flateenhet) i lederen avtar lineært med avstanden r fra lederens senterakse:

$$\vec{J}(r) = J_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \hat{\mathbf{k}} \, .$$

Vi har valgt koordinatsystem slik at lederens senterakse sammenfaller med z-aksen, og slik at strømmen går i positiv z-retning.

a) Finn total strøm I_0 i lederen uttrykt med bl.a. J_0.

Figuren til høyre er et snitt gjennom lederen i xy-planet, slik at strømmen I kommer opp av planet.



b) Tegn vektorer som illustrerer magnetfeltet $\vec{B}$ i de fire angitte punktene i avstand $2R$ fra senteraksen på henholdsvis positiv og negativ x- og y-akse.

c) Bruk Amperes lov til å finne magnetfeltet $B_u(r)$ utenfor den strømførende lederen ($r > R$), uttrykt med bl.a. J_0 og R.

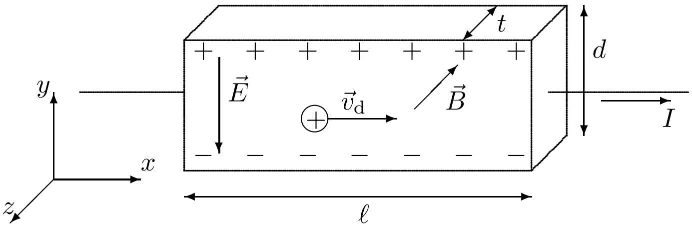
d) Magnetfeltet inni den strømførende lederen ($r < R$) er oppgitt til å være

$$B_i(r) = C_1 \cdot r + C_2 \cdot r^2 \, .$$

Bruk Amperes lov til å bestemme konstantene C_1 og C_2, uttrykt med bl.a. J_0.

Oppgave 5. **(teller 12 %)**

En Hallprobe består av et halvledermateriale og har form som vist i figuren (ikke i skala) med lengde $\ell = 40$ mm, tykkelse $t = 0,15$ mm og høyde $d = 20$ mm. Strømmen I føres i lengderetning og kan antas fordelt med homogen strømtetthet J over ledertverrsnittet $A = d \cdot t$. Halvledermaterialet har positive ladningsbærere $q = +e$ og med ladningstetthet $n = 5 \cdot 10^{20}$ m^{-3}.



Proben brukes til å måle styrken på et magnetfelt B som antas homogent og rettet i $-z$-retning i koordinatsystemet vist i figuren. Figuren gir også noen flere nyttige opplysninger.

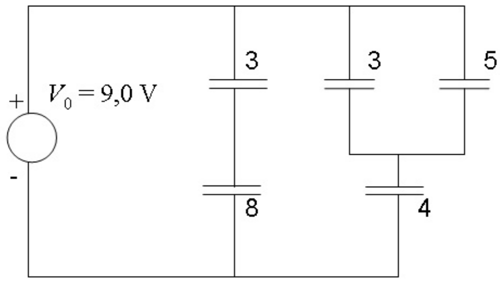
a) Med grunnlag i balanse mellom elektrisk og magnetisk kraft vis at Hallspenningen kan uttrykkes $V_{\mathrm{H}} = v_{\mathrm{d}} B d$. Vis klart i figuren hvor Hallspenningen måles.

b) V_{H} måles til 6,5 V når strømmen er $I = 0{,}15$ A. Hvor stort er magnetfeltet B?

OPPGITT: $J = q\,n\,v_{\mathrm{d}}$ med v_{d} lik driftsfart for ladning q.

Oppgave 6. **(teller 8 %)**

I figuren er spenningen over kondensatorkretsen $V_0 = 9{,}00$ V (konstant). Tallet ved hver kondensator angir kapasitansen i μF.



a) Hva er spenningen over 5 μF-kondensatoren?

b) Hva er ladningen på 4 μF-kondensatoren?

FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning.
I og $\vec{J}$ uten indeks er ledningsstrøm (conducting current), I_d og $\vec{J}_\mathrm{d}$ er forskyvningsstrøm (displacement current).

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12}$ $\qquad \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q \qquad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon \qquad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i} \qquad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon \qquad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E \qquad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I + \epsilon\dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right) \qquad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Forskyvningsstrøm: $I_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \vec{J}_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra − til +) $\qquad$ Polarisering: $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}}{\mathrm{volum}}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = \vec{m} = I\vec{A}$ $\qquad$ Magnetisering: $\vec{M} = \dfrac{\sum \vec{\mu}}{\mathrm{volum}}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E} \qquad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E} \qquad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H} \qquad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H} \qquad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\displaystyle\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \qquad$ Relativt ∞: $V(r) = \displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon r}$

Energi og energitetthet: $U = \dfrac{1}{2}\iiint V\mathrm{d}q \qquad$ Elektrisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \qquad$ Magnetisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \dfrac{Q}{V} \qquad$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R \qquad$ Energi: $U = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\dfrac{A}{d} \qquad$ Parallellkopling: $C = \displaystyle\sum_i C_i \qquad$ Seriekopling: $\dfrac{1}{C} = \displaystyle\sum_i \dfrac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B} \qquad$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \dfrac{I}{2\pi r} \qquad$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\dfrac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI\,,\quad R = \rho\dfrac{\ell}{A} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\ell}{A}\,;\quad P = VI$

$\sigma\vec{E} = \vec{J}$, der strømtetthet $= \vec{J} = nq\vec{v}_{\mathrm{d}}$ og $\vec{v}_{\mathrm{d}} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Induktans: $\mathcal{E} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\qquad \mathcal{E}_2 = -M_{21}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t},\quad M_{21} = M_{12}$ Spoler: $L = N\dfrac{\Phi_B}{I}\qquad U = \dfrac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluksen som er årsak til strømmen.

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x, y, z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
\mathrm{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Sylinderkoordinater (r, ϕ, z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$:

$$\oint\!\!\!\oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ \mathrm{d}\tau$$

$$\oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

Infinitesimale volumelement:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\tau &= r^2\ \mathrm{d}r\ \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\ \mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\tau &= r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\ \mathrm{d}r\ \ell
\end{aligned}
$$