NTNU
Det skapande universitetet

Institutt for fysikk

Eksamensoppgåve i
TFY4155 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk v/Arne Mikkelsen,
Tlf.: 486 05 392

Eksamensdato: Laurdag 24. mai 2014
Eksamenstid: 09:00 - 13:00
Tillatne hjelpemiddel (kode C):
Bestemt enkel godkjend kalkulator.
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgåve).
C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelark.

Annan informasjon:
1. Denne eksamen tel 90 % på endeleg karakter, laboratorierapport 10 %. For studentar med laboratorium godkjent 2012 og før tel denne eksamen 100 %.

2. Prosenttala i parentes gitt ved kvar oppgåve angir kor mykje ho i utgangspunktet blir vektlagd i bedømminga.

3. Nokre generelle faglege merknadar:
- Symbol skrivast i kursiv (t.d. V for potensial), medan einingar skrivast utan kursiv (f.eks. V for volt)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er einingsvektorar i henholdsvis x-, y- og z-retning.
- Ved talsvar krevst både tal og eining.

4. I fleirvalsspørsmåla er kun eit av svara rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller fleire svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.** Svar på fleirvalsspørsmål i Oppgåve 1 skriv du på første innleveringsark i ein tabell lik følgjande:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Mitt svar:										

5. Oppgåvane er utarbeida av Arne Mikkelsen.

Målform/språk: Nynorsk.

Sidetal (inkludert denne framsida): 6.

Sidetal vedlegg: 2.

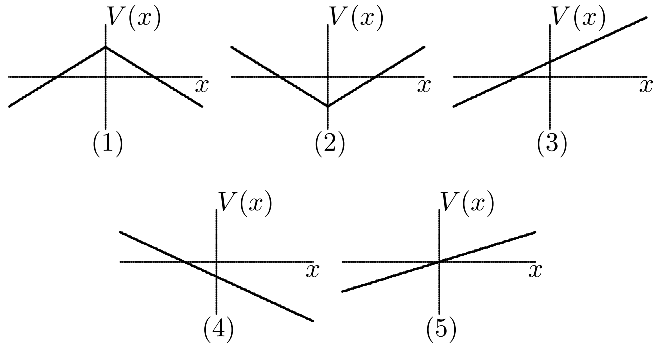
Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studentane finn sensur i Studentweb. Har du spørsmål om sensuren må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikkje kunne svare på slike spørsmål.

Oppgåve 1. Fleirvalsspørsmål (tel 30 %)

a) Eit stort plan ligg i yz-planet, dvs. har x-aksen som flatenormal. Planet har ein positiv flateladning σ. Grafen som best representerer det elektriske potensialet $V(x)$ nær planet er



A) (1)
B) (2)
C) (3)
D) (4)
E) (5)

b) Potensialet i eit område er $V(y) = V_0\, y/a$, der V_0 og a er konstantar. Kor stor potensiell elektrisk energi U er det då i volumet avgrensa av $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a, \quad 0 \le z \le a$?

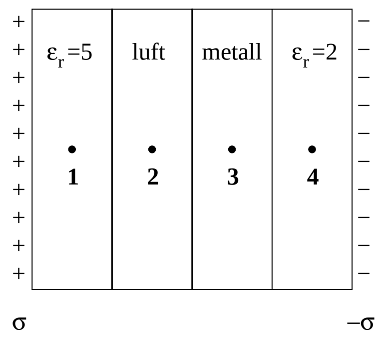
A) $U = 0$
B) $U = V_0^2 a^2$
C) $U = \epsilon_0 V_0^2 a$
D) $U = \frac{1}{4}\epsilon_0 V_0^2 a$
E) $U = \frac{1}{2}\epsilon_0 V_0^2 a$

c) Ei metallkule har ein radius på 30 cm. Kor stor ladning kan akkumulerast på ei slik kule før vi får overslag i lufta omkring? Overslag i luft skjer dersom det elektriske feltet blir større enn 3,0 MV/m.
A) 100 μC
B) 30 μC
C) 20 μC
D) 10 μC
E) 3,0 μC

d) Ein parallellplatekondensator er laga av to parallelle metallplater som har avstand d mellom. Det er luft mellom platene. Øvste plate er positivt ladd og nedste motsatt like stort negativt ladd. Spenningsforsyninga er frakopla. Sjå bort frå endeeffekter. Kva for ein storleik endrar seg ikkje dersom vi auker avstanden mellom platene?
A) Kondensatorens kapasitans
B) Det elektriske feltet mellom platene
C) Den potensielle energien lagra i kondensatoren
D) Potensialforskjellen mellom platene
E) Alle A-D.

e) To tilnærma uendeleg store parallelle metallplater har ladning respektive σ og $-\sigma$ per flateeining. Volumet mellom platene består av, frå venstre mot høgre, eit lag med dielektrikum med relativ permittivitet 5, eit lag med luft, eit lag med metall og eit lag med dielektrikum med relativ permittivitet 2 (sjå figuren). Rangér den elektriske feltstyrken i dei fire gitte posisjonane midt inne i kvart av dei fire laga.

A) $E_1 = E_2 = E_3 = E_4$
B) $E_1 > E_4 > E_2 > E_3$
C) $E_2 > E_4 > E_1 > E_3$
D) $E_1 > E_2 > E_3 > E_4$
E) $E_4 > E_1 > E_2 > E_3$

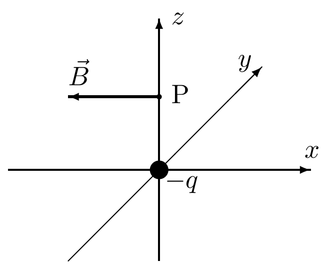


f) For same system som i oppgåva ovanfor: Rangér potensialet V i dei fire gitte posisjonane midt inne i kvart av dei fire laga.

A) $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$
B) $V_1 > V_4 > V_2 > V_3$
C) $V_2 > V_4 > V_1 > V_3$
D) $V_1 > V_2 > V_3 > V_4$
E) $V_4 > V_1 > V_2 > V_3$

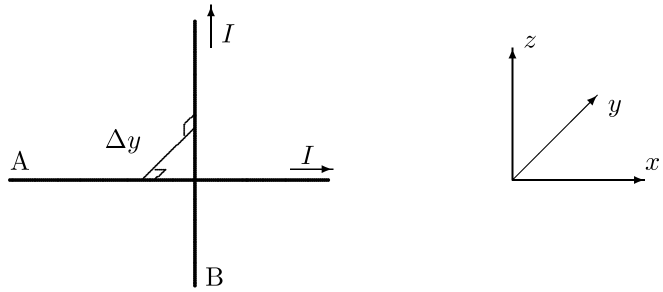
g) I den augneblinken den negative ladninga $-q$ passerer origo har magnetfeltet (pga. ladninga $-q$) i punktet P retning i negativ x-retning. Ladninga må då røre seg

A) i positiv y-retning
B) i positiv z-retning
C) i positiv x-retning
D) i negativ z-retning
E) i negativ y-retning



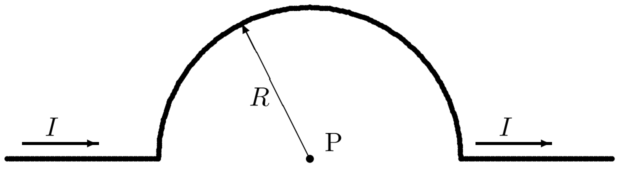
h) Ein uendeleg lang, rett leiar A i x-retning fører ein straum mot høgre som synt i figuren. Ein annen uendeleg lang, rett leiar B i z-retning fører straum oppover. Leiarane har ein avstand $\Delta y = 1,0$ m på det næraste og haldast fast i denne stillingen. Kva er retninga til den netto magnetiske krafta (sum av magnetiske krefter) på leiar A?

A) retning $+z$ (oppover)
B) retning $+x$ (mot høgre)
C) retning $-x$ (mot venstre)
D) retning $-z$ (nedover)
E) nettokrafta er lik null



i) Ein leiar består av to rette deler og ein halvsirkelforma del mellom dei, som synt i figuren. Straum går i leiaren som synt og produserer eit B-felt ved punktet P som ligg i sentrum av halvsirkelen som har radius R. Kva er retninga på B-feltet ved punktet P?

A) mot høgre
B) mot venstre
C) opp av papirplanet
D) ned i papirplanet
E) B-feltet ved P er null



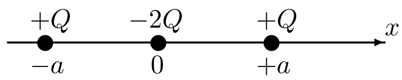
j) Ein tett vikla solenoide er 15 cm lang, har 350 viklingar, fører ein straum 3,0 A og har ein aluminiumskjerne med magnetisk susceptibilitet $\chi_m = 2,3 \cdot 10^{-5}$. Dersom du ser bort frå endeeffektar, vil du finne at verdien til den magnetiske flukstettleiken B i sentrum er omlag

A) 8,80 mT
B) 8,80 mA/m
C) 7000 mT
D) 202 mA/m
E) 0,0 mT

Oppgåve 2. Potensial og energi (tel 13%)

I denne oppgåva kan du bruke $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$.

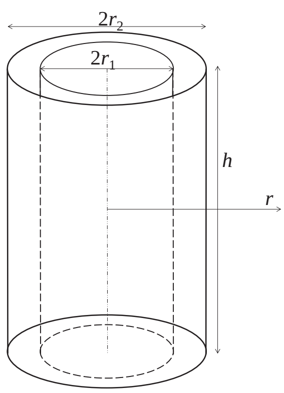
Tre punktladningar er plasserte på x-aksen, $+Q$ i $x = -a$, $-2Q$ i $x = 0$ og $+Q$ i $x = +a$.



a) Finn uttrykk for potensialet $V(x)$ for alle $x > +a$. Potensialets referanse $V = 0$ er uendeleg langt borte.

b) Finn uttrykk for den elektrostatiske energien til ladningssamlinga ved å rekne ut energien som krevjast for å sette inn éi og éi ladning. Punktladningane hentast frå uendeleg langt borte.

Oppgåve 3. Kondensator (tel 18%)

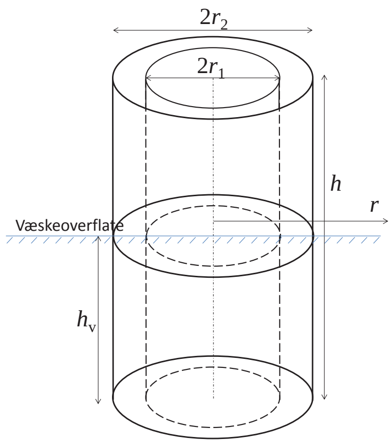


Ein luftfylt kondensator er satt saman av to tynne metallplater som er bøygd til to sylindrar med radier respektive $r_1 = 3{,}00$ cm og $r_2 = 6{,}00$ cm, sjå figuren. Sylindrane har sams akse, lengd $h = 50$ cm.

Kondensatoren er kopla til ein spenningsforsyning $V_0 = 200$ V (ikkje synt i figuren) med den indre sylinderen på høgste potensial. Denne potensialforskjellen gir kondensatoren ei ladning Q_0. Du kan sjå bort frå randeffektar ved sylindranes endeflater, dvs. anta $E = 0$ utanfor endeflatene.

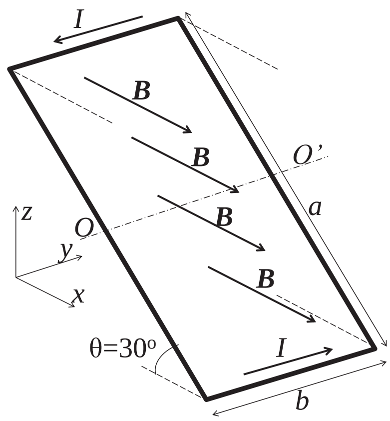
a) Finn uttrykk for det elektriske feltet $E(r)$ mellom sylindranes endeflater for alle verdier av $r \in [0, \infty]$. Q_0 skal inngå i uttrykket og ikkje V_0.

b) Finn V_0 uttrykt med m.a. Q_0 og rekn herfrå ut verdi for Q_0 (tallsvar) og finn deretter verdien av kapasitansen C_0 til kondensatoren.



Spenningsforsyninga koplast frå og kondensatoren i vertikal stilling senkast halvvegs ned i ei dielektrisk væske. Kondensatorens totalladning Q_0 haldast uendra. Væska fyller rommet mellom platene opp til $h_v = h/2$. Væska har permittivitet $\epsilon_v = \epsilon_r \epsilon_0 = 4,0 \cdot \epsilon_0$ og konduktans lik null. Indeks v for væske.

c) Finn verdi av det elektriske feltet $E_v(r_1)$ ved overflata av den indre sylinderen der denne er omgitt av væske (tallsvar).



Oppgåve 4. Magnetisme (tel 11%)

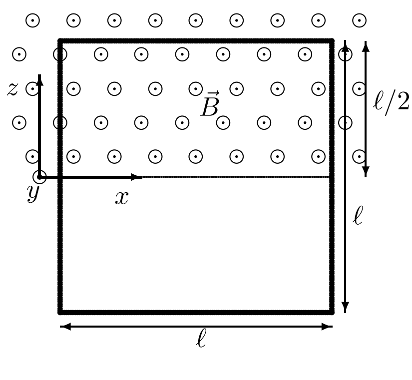
Ei plan, rektangulær straumsløyfe har sidekantar a og b og er orientert 30° med x-aksen, som synt i figuren der óg xyz-koordinatsystemet er indikert. Sidene er $a = 0,200\,\text{m}$ og $b = 0,100\,\text{m}$. Sløyfa fører ein konstant straum $I = 5{,}00$ A i retning mot klokka sett ovanfrå og er plassert i eit uniformt magnetisk felt på $B = 1{,}50$ T i x-retning, dvs. retning 30° med sløyfeplanet.

a) Rekn ut magnetisk fluks gjennom sløyfa.

b) Rekn ut magnetisk dipolmoment for straumsløyfa (storleik og retning).

c) Finn kraftmomentet som virker på sløyfa (storleik og retning for vektoren).

Oppgåve 5. Induksjon (tel 14%)



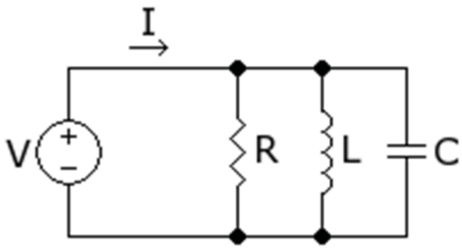
Figuren til høgre viser ei vertikalt orientert kvadratisk straumsløyfe. Sløyfa ligg i xz-planet (papirplanet), har sidekantar ℓ, masse m og total resistans R. Eit homogent magnetisk felt B dekkjer nøyaktig øvre halvdel av sløyfa. $\vec{B}$ har retning opp av papirplanet, dvs. i y-retning. Sløyfa sleppast herfrå utan startfart og vil så falle i $-z$-retning pga. tyngdekrafta mg. Vi studerer fallet fram til den øvre sløyfekanten forlater B-feltet.

a) Finn indusert elektromotorisk spenning, $\mathcal{E}$, i sløyfa uttrykt m.a. med farten v i $-z$-retning.

b) Finn uttrykk for krafta på sløyfa pga. induksjonsstraumen. Gi retninga på krafta. Krafta kan skrivast på form $F = mv/\tau$, uttrykk konstanten τ med gitte storleikar.

c) Sløyfas fart $v(t)$ vil vere ein funksjon at tida t. Bruk Newtons andre lov $\sum F = ma$ til å finne eit uttrykk for $v(t)$ der m.a. τ inngår.

Oppgåve 6. Vekselstraumskrets. (tel 8 %)



Figuren syner ein krets med ein resistans, R, ein induktans, L, og ein kapasitans, C, i parallell. Kretsen drivast av ein vekselspenningskilde med amplitude V og variabel frekvens ω. Spenningskilden og tilføringsleiarane har null resistans.

a) Finn kretsens totale impedans Z. Skriv den på forma

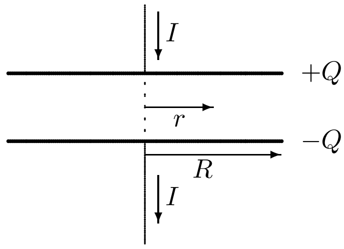
$$Z = \frac{A}{1 + i\omega\tau(1 - (\omega_0/\omega)^2)}$$

og bestem A, τ og ω_0.

b) Ved kva for ein frekvens ω er straumamplituden minimum? Bestem straumamplituden i det tilfellet.

Oppgåve 7. Forskuvingsstraum. (tel 6%)

Ein parallellplatekondensator består av to sirkulære plater med radius $R = 2{,}00$ cm. Avstanden mellom platene er liten slik at du kan anta homogent elektrisk felt mellom platene (ingen randeffektar). Ved eit visst tidspunkt tilførast kondensatoren ein elektrisk straum I (inn på den positive og ut av den negative plata).



Mellom platene blir det eit magnetfelt, gjerne forklart ved ein forskuvingsstraum $I_\mathrm{d} = I$ mellom platene. Kva er storleiken og retninga på den magnetiske feltstyrken H i ein radiell avstand $r = 1{,}00$ cm frå senteraksen mellom platene når straumen $I = 2{,}52$ A?

Vedlegg: FORMELLISTE.

Formlanes gyldighetsområde og dei ulike symbolas meining takast for å vere kjent. Symbolbruk som i forelesningsnotata.

Q, ρ og σ utan indeks syner til *frie* ladningar. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning.
I og $\vec{J}$ utan indeks er leiarstraum (conducting current), I_d og $\vec{J}_\mathrm{d}$ er forskuvingsstraum (displacement current).

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12}$ $\quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$ $\quad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon$ $\quad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i}$ $\quad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\quad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i}$ $\quad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ $\quad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E$ $\quad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I + \epsilon\frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right)$ $\quad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\quad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likningar: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\quad \mathrm{div}\vec{B} = 0$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Forskuvingsstraum: $I_\mathrm{d} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\quad \vec{J}_\mathrm{d} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra − til +) $\quad$ Polarisering: $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\text{volum}}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = \vec{m} = I\vec{A}$ $\quad$ Magnetisering: $\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}}{\text{volum}}$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$ $\quad \vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E}$ $\quad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E}$ $\quad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H}$ $\quad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H}$ $\quad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$, $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$, $\quad$ Relativt ∞: $V(r) = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon r}$

Energi og energitettleik: $U = \frac{1}{2}\iiint V\mathrm{d}q$ $\quad$ Elektrisk: $u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ $\quad$ Magnetisk: $u = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \frac{Q}{V}$ $\quad$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ $\quad$ Energi: $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\frac{A}{d}$ $\quad$ Parallellkopling: $C = \sum_i C_i$ $\quad$ Seriekopling: $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

Kraft på straumførende leiar: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}$ $\quad$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ $\quad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leiar: $H_\theta = \frac{I}{2\pi r}$ $\quad$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\frac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI\,, \quad R = \rho\dfrac{\ell}{A} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\ell}{A}\,; \quad P = VI$

$\sigma\vec{E} = \vec{J}$, der straumtetthet $= \vec{J} = nq\vec{v}_{\mathrm{d}}$ og $\vec{v}_{\mathrm{d}} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Induktans: $\mathcal{E} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \mathcal{E}_2 = -M_{21}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}, \quad M_{21} = M_{12}$ Spoler: $L = N\dfrac{\Phi_B}{I} \qquad U = \dfrac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: Ein indusert straum er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluks som er årsak til straumen.

Kompleks AC-signal: $V(t) = V_0 e^{i\omega t} = |V_0|e^{i\alpha}e^{i\omega t} \qquad I(t) = I_0 e^{i\omega t} = |I_0|e^{i\beta}e^{i\omega t}$

$$Z = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0}{I_0} = |Z|e^{i\phi} \qquad Z_R = R \qquad Z_L = i\omega L \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x, y, z), med einingsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
\mathrm{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Sylinderkoordinater (r, ϕ, z), med einingsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ), med einingsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for eit tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$:

$$\oiint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ \mathrm{d}\tau$$
$$\oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\tau &= r^2\,\mathrm{d}r\ \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \ \xrightarrow{\text{kulesymmetri}}\ 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\tau &= r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \ \xrightarrow{\text{syl.symmetri}}\ 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\ell
\end{aligned}$$