NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i

TFY4155 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk v/Arne Mikkelsen,
Tlf.: 486 05 392 / 7359 3433

Eksamensdato: Onsdag 13. august 2014
Eksamenstid: 15:00 - 19:00
Tillatte hjelpemidler (kode C):
Bestemt enkel godkjent kalkulator.
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelark.

Annen informasjon:

1. Denne eksamen teller 90 % på endelig karakter, laboratorierapport 10 %. For studenter med laboratorium godkjent 2012 og før teller denne eksamen 100 %.

2. Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen.

3. Noen generelle faglige merknader:
   - Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
   - $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
   - Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

4. I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**
Svar på flervalgsspørsmål i Oppgave 1 skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende den følgende:

	a	b	c	d	e	f	g
Mitt svar:							

5. Oppgavene er utarbeidet av Arne Mikkelsen.

Målform/språk: Bokmål.

Antall sider (inkludert denne forsida): 6.

Antall sider vedlegg: 2.

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

(blank side)

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 20 %)

a) En parallellplatekondensator har luft mellom platene og er ladd opp til 500 V med spenningsforsyningen frakopla. Et plastmateriale med relativ permittivitet 5,0 føres inn mellom platene og fyller det meste av rommet. Energien på kondensatorplatene vil da
A) øke
B) avta
C) ikke endres
D) bli null
E) opplysninger mangler for å kunne svare på spørsmålet

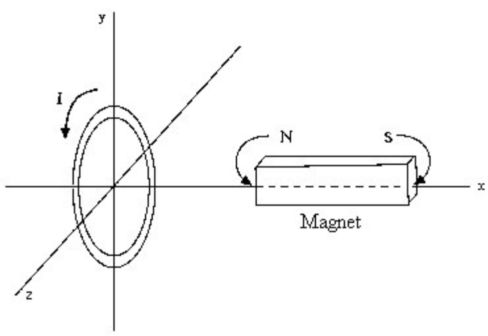
b) Potensialet på et uendelig stort positivt ladd plan er +20 V. Planet har en uniform ladningstetthet +2 nC/m^2 og er omgitt av luft. I hvilken avstand fra planet er da $V = 0$?
A) ∞ (uendelig)
B) V er alltid positiv
C) 9 cm
D) 18 mm
E) 18 cm

c) To kuler, 1 og 2, har like stor radius R og like stor ladning Q. Kulene vekselvirker ikke med hverandre. Kule 1 har ladningen jamt fordelt utover overflata, mens kule 2 har ladningen jamt fordelt utover heile volumet. Kule 1 har potensiell energi $U_1 = \dfrac{1}{8\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$, mens kule 2 har potensiell energi U_2 gitt ved:

A) $U_2 = \dfrac{1}{8\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$
B) $U_2 = \dfrac{1}{20\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$
C) $U_2 = \dfrac{1}{10\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$
D) $U_2 = \dfrac{3}{20\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$
E) $U_2 = \dfrac{3}{40\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{R}$

d) Ei kompassnål befinner seg i et homogent magnetisk felt med dens sydpol pekende i positiv retning av $\vec{B}$. Nettokrafta på kompassnåla
A) virker i samme retningen som $\vec{B}$.
B) virker i retning rett vinkel med $\vec{B}$.
C) virker i retning rett vinkel med planet gjennom $\vec{B}$ og kompassnåla.
D) virker i motsatt retning av $\vec{B}$.
E) er lik null.

e) En kopperring ligger i yz-planet som vist. Magnetens langakse N-S ligger langs x-aksen. Strøm i ringen indusert pga. magneten, har retning som vist i figuren med retning nedover i den delen av ringen som vender mot oss.



A) Magneten må bevege seg bort fra ringen.
B) Magneten må bevege seg mot ringen.
C) Magneten må bevege seg hverken fra eller mot ringen.
D) Det er ikke nødvendig at magneten beveger seg.
E) Magneten må holdes i ro for å opprettholde strømmen.

f) Maxwell generaliserte Amperes lov slik at den inkluderer forskyvningsstrøm, og loven lyder da

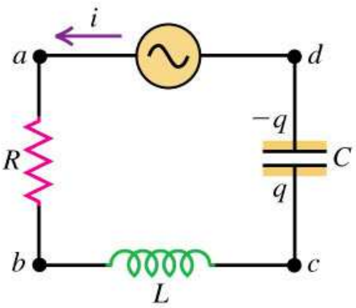
$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\,.$$

I denne likningen er forskyvningsstrømmen definert

A) $I + \epsilon_0 \dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}$ B) I C) $\epsilon_0 \displaystyle\int \left(\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) \mathrm{d}t$ D) $\epsilon_0 \dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}$ E) $\epsilon_0 \Phi_E$

g) Kretsen i figuren består av en vekselspenningskilde (AC) og en seriekopling av en resistor, induktans og en kondensator med endelige verdier. Kretsstrømmen (angitt med i) har en veldig liten amplitude når kilden har en veldig lav frekvens $\omega \to 0$. Hvilket kretselement er årsak til dette?

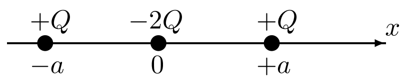
A) Resistansen R
B) Induktansen L
C) Kapasitansen C
D) En kombinasjon av L og C
E) Villedende spørsmål - strømmen har en stadig stigende amplitude når frekvensen er veldig høy.



Oppgave 2. Punktladninger (teller 17%)

I denne oppgaven kan du bruke $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$.

Tre punktladninger er plassert på x-aksen, $+Q$ i $x = -a$, $-2Q$ i $x = 0$ og $+Q$ i $x = +a$.



a) Finn uttrykk for det elektriske feltet $\vec{E}(x)$ på x-aksen for alle $x > a$.

b) Finn uttrykk for den elektrostatiske energien til ladningssamlingen. Energien er null når punktladningene er uendelig langt fra hverandre.

c) Vis at det elektriske feltet på x-aksen langt unna ladningssamlingen ($x \gg a$) kan uttrykkes

$$\vec{E}(x) = kQ \frac{c}{x^n}\,\hat{\mathbf{i}}$$

og gjennom beviset bestem konstanten c og eksponenten n.

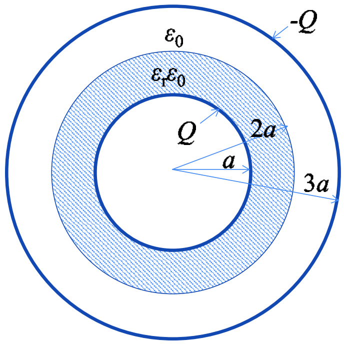
Du kan evt. få bruk for:

Potensialet rundt en punktladning relativt uendelig er $V(r) = kQ/r$.

$(1 \pm y)^{-2} \approx 1 \mp 2y + 3y^2$ for $y \ll 1$.

Oppgave 3. Kulekondensator (teller 20 %)

En kulekondensator består av to tynne kuleskall av elektrisk ledende materiale med radius henholdsvis a og c (markert med tykke sirkler i figuren). Innerskallet har elektrisk ladning $+Q$ og ytterskallet ladning $-Q$. Rommet mellom $r = a$ og $r = 2a$ er fylt av et dielektrikum med relativ permittivitet ϵ_r. Mellom $r = 2a$ og $r = 3a$ er rommet fylt av luft med permittivitet ϵ_0.



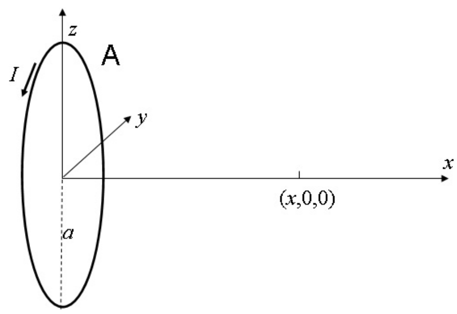
a) Finn uttrykk for den elektriske felstyrken $\vec{E}(r)$ overalt i rommet (alle r).

b) Finn uttrykk for potensialforskjellen over kondensatoren (mellom kuleskallene).

c) Finn uttrykk for polariseringen $\vec{P}(r)$ overalt i rommet. Angi spesielt retning for $\vec{P}(r)$.

Oppgave 4. Magnetiske felt (teller 20 %)

a) Ei sirkelformet strømsløyfe A med radius a fører strømmen I. Sirkelen har sentrum i origo og ligger normalt på x-aksen. Strømretningen er som vist i figuren med retning nedover i den delen av sirkelen som vender mot oss.



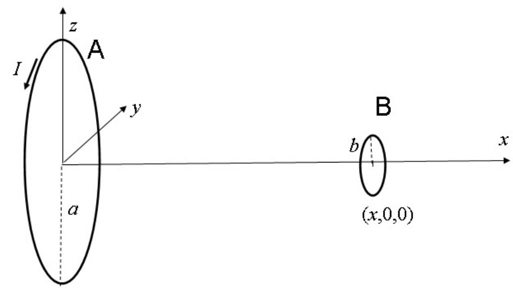
Bruk Biot-Savarts lov til å vise at $\vec{B}$-feltet på x-aksen i et punkt $(x, 0, 0)$ i størrelse og retning er gitt ved

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{r^3}\, \hat{\mathbf{i}}\,, \quad \text{med} \quad r = \left(x^2 + a^2\right)^{1/2}\,.$$

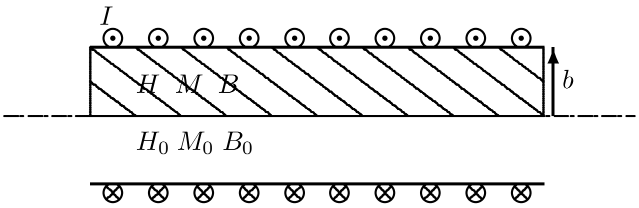
b) Ei anna sirkulær sløyfe B med radius b har sentrum i $(x, 0, 0)$ og er også normal på x-aksen. Vi kaller nå strømmen i A for I_A, og fra tid $t = 0$ til t_1 øker denne jamt (lineært) fra $I_A = 0$ til $I_A(t_1) = I_1$.

Du kan forutsette at magnetfeltet er homogent innenfor sløyfa B og lik feltet i sentrum.

Finn uttrykk for indusert strøm I_B i sløyfe B mellom tid $t = 0$ til $t = t_1$ når B har en resistans R_B jamt fordelt over sirkelen.



Oppgave 5. Magnetisk materiale. (teller 15 %)



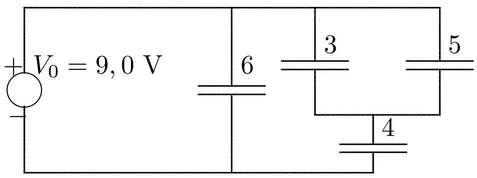
Figuren viser en solenoide med radius b = 30 mm og viklingstall $n = 800\,\mathrm{m}^{-1}$. Antall viklinger er altså mye større enn 10 som er brukt i figuren. Strømmen I = 3,50 A. Et jernmateriale med relativ permeabilitet μ_r = 2000 fyller halve solenoiden, resten er luftfylt. Jernet har metningsmagentisering $M_\mathrm{s} = 1,56 \cdot 10^6$ A/m. Senteraksen til solenoiden er i figuren vist med halvstiplet linje.
Du kan anta solenoiden er svært lang slik at du kan se bort fra randeffekter og anta null felt utenfor solenoiden.

a) Bruk Amperes lov (f.eks. med integrasjonsveg lik et passende rektangel) til å finne verdier for den magnetiske feltstyrken H_0 og H i henholdsvis den luftfylte delen av solenoiden og den jernfylte delen av solenoiden. Angi retningen.

b) Finn verdier for M_0 og B_0 i den luftfylte delen av solenoiden, og finn de samme M og B i den jernfylte delen av solenoiden. Angi retningen for alle størrelsene.

Oppgave 6. Likestrømskrets (teller 8 %)

I figuren er spenningen over kondensatorkretsen V_0 = 9,00 V (konstant). Tallet ved hver kondensator angir kapasitansen i μF.



a) Hva er ladningen på 6 μF-kondensatoren?

b) Hva er spenningen over 5 μF-kondensatoren?

Vedlegg: FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning.
I og $\vec{J}$ uten indeks er ledningsstrøm (conducting current), I_d og $\vec{J}_\mathrm{d}$ er forskyvningsstrøm (displacement current).

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12}$ $\qquad \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q \qquad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon \qquad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i} \qquad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon \qquad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E \qquad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I + \epsilon\dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right) \qquad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Forskyvningsstrøm: $I_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \vec{J}_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra $-$ til $+$) $\qquad$ Polarisering: $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}}{\text{volum}}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = \vec{m} = I\vec{A}$ $\qquad$ Magnetisering: $\vec{M} = \dfrac{\sum \vec{\mu}}{\text{volum}}$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E} \qquad \vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E} \qquad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E} \qquad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H} \qquad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H} \qquad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\displaystyle\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \qquad$ Relativt ∞: $\quad V(r) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon r}$

Energi og energitetthet: $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\iiint V\mathrm{d}q \qquad$ Elektrisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \qquad$ Magnetisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \dfrac{Q}{V} \qquad$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R \qquad$ Energi: $U = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\dfrac{A}{d} \qquad$ Parallellkopling: $C = \displaystyle\sum_i C_i \qquad$ Seriekopling: $\dfrac{1}{C} = \displaystyle\sum_i \frac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B} \qquad$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \dfrac{I}{2\pi r} \qquad$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\dfrac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI\,,\quad R = \rho\dfrac{\ell}{A} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\ell}{A}\,;\quad P = VI$

$\sigma\vec{E} = \vec{J}$, der strømtetthet $= \vec{J} = nq\vec{v}_{\rm d}$ og $\vec{v}_{\rm d} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Induktans: $\mathcal{E} = -L\dfrac{{\rm d}I}{{\rm d}t}$ $\quad \mathcal{E}_2 = -M_{21}\dfrac{{\rm d}I_1}{{\rm d}t}$, $\quad M_{21} = M_{12}$ $\qquad$ Spoler: $L = N\dfrac{\Phi_B}{I}$ $\quad U = \dfrac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluks som er årsak til strømmen.

Kompleks AC-signal: $V(t) = V_0 e^{i\omega t} = |V_0|e^{i\alpha}e^{i\omega t}$ $\qquad I(t) = I_0 e^{i\omega t} = |I_0|e^{i\beta}e^{i\omega t}$

$$Z \;=\; \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0}{I_0} = |Z|e^{i\phi} \qquad Z_R = R \qquad Z_L = i\omega L \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x, y, z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\text{grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z}\\
\text{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\
\text{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Sylinderkoordinater (r, ϕ, z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z}\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$:

$$\oiint \vec{F}\cdot{\rm d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ {\rm d}\tau$$

$$\oint \vec{F}\cdot{\rm d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot{\rm d}\vec{A}$$

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}
{\rm d}\tau &= {\rm d}x\,{\rm d}y\,{\rm d}z\\
{\rm d}\tau &= r^2\,{\rm d}r\,\sin\theta\,{\rm d}\theta\,{\rm d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\,{\rm d}r\\
{\rm d}\tau &= r\,{\rm d}r\,{\rm d}\phi\,{\rm d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\,{\rm d}r\,\ell
\end{aligned}$$