NTNU
Det skapende universitet



**Institutt for fysikk**

# Eksamensoppgave i
# TFY4155 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
# FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

**Faglig kontakt under eksamen:** Institutt for fysikk v/Arne Mikkelsen,
**Tlf.:** 486 05 392

**Eksamensdato: Fredag 29. mai 2015**
**Eksamenstid: 09:00 - 13:00**
**Tillatte hjelpemidler (kode C):**
Bestemt enkel godkjent kalkulator.
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelark.

**Annen informasjon:**
1. Denne eksamen teller 90 % på endelig karakter, laboratorierapport 10 %. For studenter med laboratorium godkjent 2012 og før teller denne eksamen 100 %.

2. Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen (summerer til 100 %).

3. Noen generelle faglige merknader:
- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. $V$ for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis $x$-, $y$- og $z$-retning.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

4. I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**
5. Svar på flervalgsspørsmålene fører du på **siste ark** i dette oppgavesettet. Arket skal innleveres.

6. Oppgavene er utarbeidet av Arne Mikkelsen og vurdert av Tor Nordam.

**Målform/språk:** Bokmål.

**Antall sider (inkludert denne forsida):** 8.

**Antall sider vedlegg:** 3.

**Kontrollert av:**

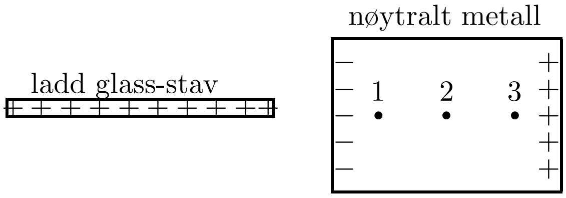
Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

## Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 40 %)

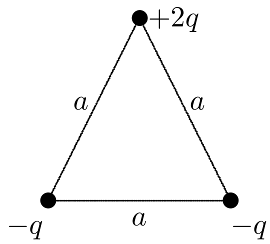
**1-1.** Du bringer en positivt og uniformt ladd glass-stav (isolator) nesten inntil et elektrisk nøytralt metall, som vist i figuren. Vi får da indusert overflateladning på det nøytrale metallet, som vist i figuren. Ranger potensialet $V$ i de angitte punktene 1, 2 og 3 i metallet.

A) $V_1 > V_2 > V_3$
B) $V_1 = V_2 = V_3$
C) $V_1 < V_2 < V_3$
D) $V_1 = V_3 > V_3$
E) $V_1 < V_3 = V_3$




**1-2.** Tre punktladninger, en positiv ($2q$) og to negative ($-q$), er plassert i hvert sitt hjørne av en likesidet trekant med sidekanter $a$. Hva er den potensielle energien til de tre ladningene? (Dvs. i forhold til om de tre ladningene var uendelig langt fra hverandre.)

A) $3q^2/4\pi\epsilon_0 a$
B) 0
C) $q^2/4\pi\epsilon_0 a$
D) $-3q^2/4\pi\epsilon_0 a$
E) $-q^2/4\pi\epsilon_0 a$.




**1-3.** Et vannmolekyl har dipolmoment $p = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Cm. En liter vann inneholder 55,6 mol der 1 mol $= 6,02 \cdot 10^{23}$ molekyler. Hva blir da øvre teoretiske grense for elektrisk polarisering $P$ i 1,0 liter vann?

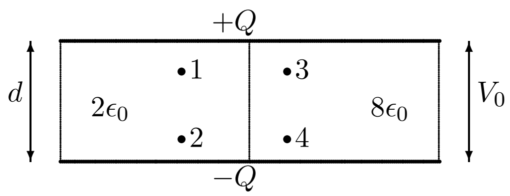
A) $P = 0,21\ \mathrm{C/m^2}$
B) $P = 2,1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{C/m^2}$
C) $P = 1,4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{C/m^2}$
D) $P = 9,7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}$
E) $P = 6,2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}$.

**1-4.** En kondensator på 4,0 $\mu$F er ladd til 150 V. Hvor mye tilleggsenergi må du legge til for å lade den til 300 V?

A) 0,60 J
B) 45 mJ
C) 0,14 J
D) 0,30 mJ
E) 0,28 J

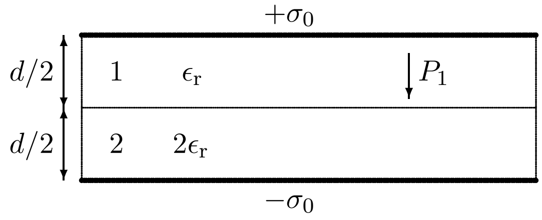
**1-5.** To parallelle metallplater har stor lineær utstrekning i forhold til avstanden $d$ mellom platene. Øverste plate har positiv ladning $Q$ og potensial $V_0$, nederste plate har negativ ladning $-Q$ og potensial 0. Venstre halvdel av rommet mellom platene er fylt med et dielektrikum med relativ permittivitet 2. Høyre halvdel av rommet mellom platene er fylt med et dielektrikum med relativ permittivitet 8. I figuren er det angitt fire posisjoner $j = 1, 2, 3, 4$. Hva er riktig rangering av potensialene $V_j$ i disse fire posisjonene?

A) $V_3 > V_1 > V_2 > V_4$
B) $V_3 > V_1 > V_4 > V_2$
C) $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$
D) $V_1 = V_3 > V_2 = V_4$
E) $V_1 = V_3 < V_2 = V_4$



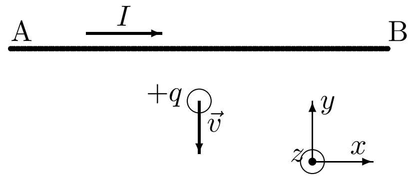
**1-6.** To store metalliske plan har areal $A$ og ladning per flateenhet henholdsvis $\sigma_0$ (øverste plate) og $-\sigma_0$ (nederste plate). Plateavstanden er $d$. Volumet mellom metallplatene er fylt med to dielektriske skiver. Medium 1, i øverste halvdel, har relativ permittivitet $\epsilon_r$ mens medium 2, i nederste halvdel, har relativ permittivitet $2\epsilon_r$. Hvor stor blir polariseringen $P_1$ i medium 1?

A) $P_1 = \left(1 - \dfrac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0$
B) $P_1 = \epsilon_r \, \sigma_0$
C) $P_1 = \left(1 + \dfrac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0$
D) $P_1 = \dfrac{\sigma_0}{\epsilon_r}$
E) $P_1 = \sigma_0$ .



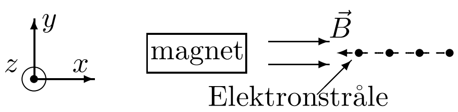

**1-7.** En lang, rett ledning langs $x$-aksen fører en strøm i positiv $x$-retning. En positiv punktladning beveger seg langs $y$-aksen i negativ $y$-retning. Den magnetiske krafta som ledningen utøver på punktladningen

A) er i positiv $x$-retning
B) er i negativ $x$-retning
C) er null
D) er i positiv $z$-retning (opp av papirplanet)
E) er i negativ $z$-retning (ned i papirplanet)




**1-8.** En elektronstråle går retning rett mot venstre, i negativ $x$-retning i figuren. Du ønsker å stoppe elektronstrålen ved å plassere en magnet med nordpolen rett mot strålen, slik at magnetisk felt $B$ fra magneten peker rett til høyre ($x$-retning) mot elektronstrålen. Elektroner er negativt ladd. Vil du stoppe elektronstrålen?

A) Nei, men den avbøyes i positiv $y$-retning.
B) Nei, men den avbøyes i negativ $y$-retning.
C) Ja, den vil gradvis miste fart og stoppe før magneten.
D) Nei, men den vil miste fart.
E) Nei, den vil fortsette uhindret til den treffer magneten.



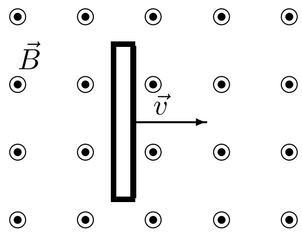

**1-9.** En sirkulær strømsløyfe fører en konstant strøm $I$. Sløyfa er plassert i et område med homogent magnetisk felt, $\vec{B}$. Netto magnetisk kraftmoment, $\vec{\tau}$, på strømsløyfa

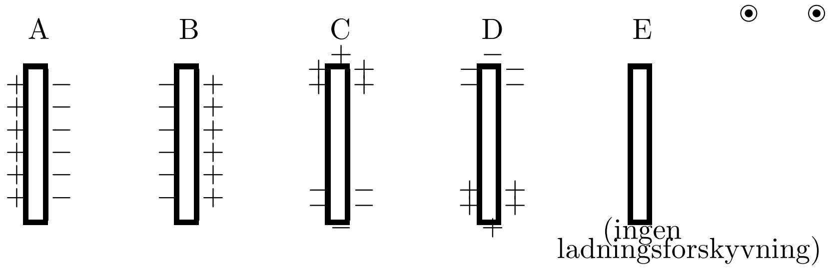
A) vil forsøke å orientere sløyfa slik at sløyfas flatenormal er normal til retningen på $\vec{B}$
B) vil forsøke å orientere sløyfa slik at sløyfas flatenormal er parallell til retningen på $\vec{B}$
C) vil forsøke å rotere sløyfa rundt dens flatenormal
D) vil forsøke å orientere sløyfa slik at sløyfas flatenormal er antiparallell til retningen på $\vec{B}$
E) er lik null.

**1-10.** Når det føres et materiale inn i det indre av en solenoide som fører en konstant strøm, måles magnetisk flukstetthet $B$ til å falle med 0,003 %. Da er den magnetiske susceptibiliteten til materialet lik

A) $-3 \cdot 10^{-5}$
B) $+7 \cdot 10^{-5}$
C) $1,00007$
D) $0,99997$
E) $-7 \cdot 10^{-5}$

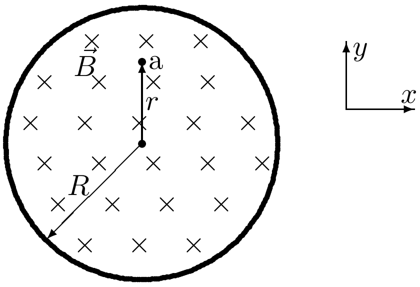
**1-11.** En metallstav med null nettoladning beveges med konstant hastighet til høyre i et område som har et magnetisk felt $\vec{B}$ i retning opp av papirplanet. Hvilken av figurene beskriver best ladningsfordelingen i metallstaven under bevegelsen?



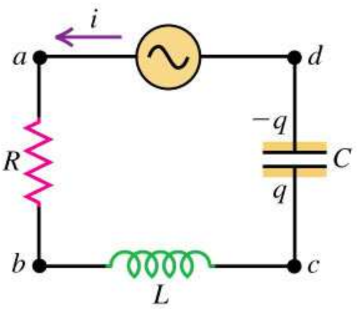



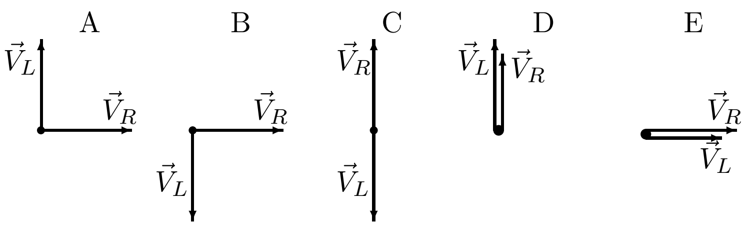

**1-12.** Figuren viser tverrsnittet av en lang, rett solenoide med et homogent magnetfelt $B$ innnvendig. Magnetfeltet har retning ned i tegneplanet og styrken er økende med tida. Hva er retningen for den elektriske krafta på en positivt ladd partikkel ved punkt a?

A) krafta er null.
B) $-y$-retning
C) $+y$-retning
D) $+x$-retning
E) $-x$-retning



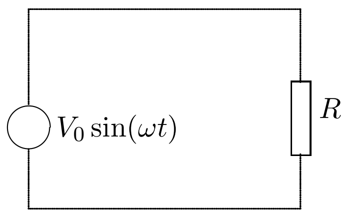

**1-13.** Kretsen i figuren består av en vekselspenningskilde (AC) og en seriekopling av en resistor, induktans og en kondensator. Hvilket diagram viser faseforholdet (i komplekst viser-plan, roterende mot klokka) mellom spenningen $V_R$ over motstanden og spenningen $V_L$ over induktansen?




**1-14.** I kretsen i figuren øker frekvensen til spenningsforsyningen mens alt annet holdes konstant. Da vil middeleffekten (gjennomsnitt over tid) som dissiperes i motstanden $R$

A) øke
B) ikke endres
C) øke eller avta avhengig av størrelsen på opprinnelig frekvens
D) øke eller avta avhengig av størrelsen på $R$
E) avta.



**1-15.** En harmonisk elektromagnetisk bølge i vakuum har et elektrisk felt med komponent bare i $x$-retning, og komponenten er $E_x = E_0 \cos(ky + \omega t)$. Denne bølgen forplanter seg i

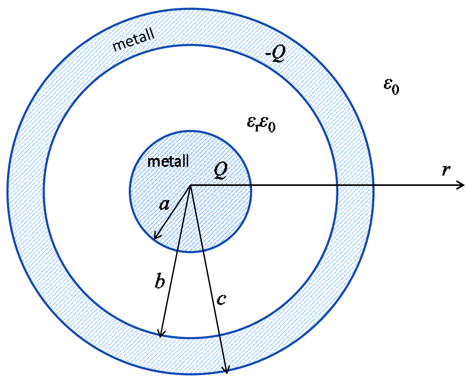
A) positiv $z$-retning
B) negativ $z$-retning
C) positiv $y$-retning
D) negativ $y$-retning
E) ingen av disse retningene.

**1-16.** På et visst punkt i et medium varierer elektrisk og magnetisk felt harmonisk med tida. På et visst tidspunkt er $\vec{E} = (6,20 \cdot 10^3 \text{ V/m})\,\hat{\mathbf{i}}$ og $\vec{B} = (3,60 \cdot 10^{-5} \text{ T})\,\hat{\mathbf{k}}$. Bølgefarta i mediet er

A) $581 \cdot 10^{-3}$ m/s
B) $223 \cdot 10^{6}$ m/s
C) $223 \cdot 10^{-3}$ m/s
D) $172 \cdot 10^{6}$ m/s
E) $300 \cdot 10^{6}$ m/s.

**Oppgave 2. Gauss' lov (teller 20%)**

Ei metallkule og et metallskall er plassert konsentrisk som vist i figuren. Rommet mellom kula og skallet er fylt av et dielektrikum med permittivitet $\epsilon_r \epsilon_0$. Utenfor kuleskallet er det luft med permittivitet $\epsilon_0$. Dimensjoner (radier) er vist i figuren. Kula har ladning $+Q$ og kuleskallet har ladning $-Q$. Potensialets referanse $V = 0$ er uendelig langt borte.




**a)** Finn uttrykk for det elektriske feltet $\vec{E}(r)$ for alle verdier av avstanden $r$ fra sentrum av kula.

**b)** Finn potensialet $V(a)$ på overflata av metallkula.

Mellomrommet med dielektrikum (mellom $r = a$ og $r = b$) fylles nå med en positiv overskuddsladning $\rho(r)$ slik at potensialet i området ikke lenger er som i oppg. a) og b) men har forløp

$$V(r) = V_0 \frac{b - r}{b - a}.$$

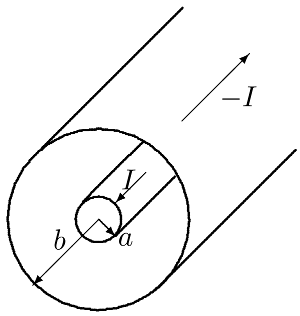
Dvs. potensialet avtar lineært fra $V(a) = V_0$ til $V(b) = 0$.

**c)** Finn uttrykk for det elektriske feltet $\vec{E}(r)$ for $a < r < b$. Uttrykket er ulikt fra svaret i a).

**d)** Finn uttrykk for romladningstettheten $\rho(r)$ for $a < r < b$.

Tips: grad og div i kulekoordinater er oppgitt på formelarket.

**Oppgave 3. Magnetfelt og induktans (teller 22%)**




En uendelig lang koaksialkabel fører en konstant strøm $+I$ i innerleder og $-I$ i ytterleder. Innerlederen er en massiv sylinder med radius $a$ der strømmen er jamt fordelt over tverrsnittet. Ytterlederen er et svært tynt sylinderskall med radius $b$. Mellom lederne er det elektrisk isolerende materiale med permeabilitet $\mu_0$.

**a)** Bruk Ampères lov til å finne magnetisk feltstyrke $\vec{H}(r)$ for alle verdier av avstanden $r$ fra sentrum av kabelen. Retningen skal angis. Lag en skisse av $H(r)$ (dvs. med $r$ på horisontalakse og $H$ på vertikalakse.)

**b)** Finn sjølvinduktansen til kabelen, uttrykt per lengdeenhet: $L' = L/\ell$, der $\ell$ er lengde langs kabelen. Bruk uttrykket $U' = \frac{1}{2}L'I^2$, der $U'$ er magnetisk energiinnhold per lengdeenhet av kabelen. Magnetisk energitetthet (per volumenhet) er $u = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$.

Dersom du ikke har funnet svar i a) kan du for opg. **b)** bruke $H(r) = Cr$ inni innerlederen og $H(r) = Ca^2/r$ mellom lederne, der $C$ er en konstant.

**c)** Hva er sjølvinduktansen $L$ for en 10 m lang kabel med $a = 0,50$ mm og $b = 3,0$ mm?

**Oppgave 4. Magnetisk kraft (teller 8%)**

En partikkel med masse $m$ og ladning $q$ skytes inn med fart $v$ vinkelrett på et homogent magnetfelt $B$.

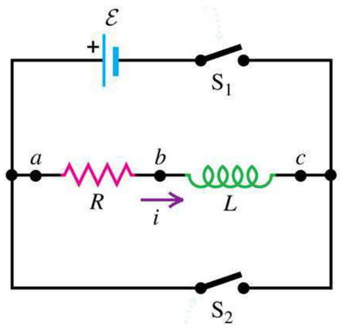
**a)** Vis at partikkelbanen blir en sirkel med radius

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

**b)** Bestem så baneradien $r$ og omløpstiden $T$ numerisk når partikkelen er en $\alpha$-partikkel med kinetisk energi $U = 3{,}0$ MeV og magnetfeltet er $B = 0{,}50$ T.
En $\alpha$-partikkel har masse $m = 6,64 \cdot 10^{-27}$ kg, og ladning $q = 2e$.
1 eV $= e \cdot 1\,\mathrm{V} = 1,602 \cdot 10^{-19}$ J.

**Oppgave 5.** $RL$**-krets. (teller 10 %)**

En motstand $R$, en induktans $L$, en likespenningskilde med spenning $\mathcal{E}$ og to brytere $S_1$ og $S_2$ er kopla som vist i figuren. Det er ingen resistans i kretsen utenom $R$. Begge bryterne har vært åpne i lang tid. Spenningen (potensialforskjellen) over $R$ betegner vi $V_R$ og spenningen over $L$ betegner vi $V_L$. Strømmen gjennom $R$ og $L$ betegner vi $I(t)$ (notert $i$ i figuren).




Ved tid $t = 0$ lukkes bryteren $S_1$ mens bryter $S_2$ fortsatt er åpen.

**a)** Hva er $V_L(0^+)$ og $V_R(0^+)$ umiddelbart etter bryteren $S_1$ er lukket?

**b)** Hva er $V_L(\infty)$ og $V_R(\infty)$ svært lang tid etter bryteren $S_1$ er lukket?

Etter bryteren $S_1$ har vært lukket lenge og forholdene stabilisert seg, åpnes bryter $S_1$ igjen og i *akkurat samme øyeblikk* lukkes bryter $S_2$. Vi definerer dette øyeblikket påny som $t = 0$.

**c)** Hva er $V_L(0^+)$ og $V_R(0^+)$ umiddelbart etter bryterne har skifta stilling?

**d)** Sett opp differensiallikningen for $I(t)$, og finn deretter uttrykk for $I(t)$ for $t > 0$.

(blank side)

**Vedlegg: FORMELLISTE.**

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

$Q, \rho$ og $\sigma$ uten indeks viser til *frie* ladninger. $Q_\mathrm{i}$, $\rho_\mathrm{i}$ og $\sigma_\mathrm{i}$ er indusert ladning.
$I$ og $\vec{J}$ uten indeks er ledningsstrøm (conducting current), $I_\mathrm{d}$ og $\vec{J}_\mathrm{d}$ er forskyvningsstrøm (displacement current).

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q_1q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12}$ $\qquad \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$ $\qquad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon$ $\qquad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i}$ $\qquad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon$ $\qquad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i}$ $\qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ $\qquad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E$ $\qquad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Ampères lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I + \epsilon\dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right)$ $\qquad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\qquad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Forskyvningsstrøm: $I_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\quad \vec{J}_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra $-$ til $+$) $\qquad$ Polarisering: $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}}{\text{volum}}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = \vec{m} = I\vec{A}$ $\qquad$ Magnetisering: $\vec{M} = \dfrac{\sum \vec{\mu}}{\text{volum}}$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$ $\qquad \vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E}$ $\qquad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E}$ $\qquad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H}$ $\qquad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H}$ $\qquad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$, $\qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$, $\qquad$ Relativt $\infty$: $V(r) = \int \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon r}$

Energi og energitetthet: $U = \dfrac{1}{2}\iiint V\mathrm{d}q$ $\qquad$ Elektrisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ $\qquad$ Magnetisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \dfrac{Q}{V}$ $\qquad$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ $\qquad$ Energi: $U = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\dfrac{A}{d}$ $\qquad$ Parallellkopling: $C = \sum_i C_i$ $\qquad$ Seriekopling: $\dfrac{1}{C} = \sum_i \dfrac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}$ $\qquad$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ $\qquad \mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

$H$-felt rundt $\infty$ lang leder: $H_\theta = \dfrac{I}{2\pi r}$ $\qquad$ $H$-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\dfrac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI$, $\quad R = \rho\dfrac{\ell}{A} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\ell}{A}$; $\quad P = VI$

$\sigma\vec{E} = \vec{J}$, der strømtetthet $= \vec{J} = nq\vec{v}_\mathrm{d}$ og $\vec{v}_\mathrm{d} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Induktans: $\mathcal{E} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\quad \mathcal{E}_2 = -M_{21}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}, \quad M_{21} = M_{12}$ $\quad$ Spoler: $L = N\dfrac{\Phi_B}{I}$ $\quad U = \dfrac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluks som er årsak til strømmen.

Kompleks AC-signal: $V(t) = V_0 e^{i\omega t} = |V_0| e^{i\alpha} e^{i\omega t}$ $\quad I(t) = I_0 e^{i\omega t} = |I_0| e^{i\beta} e^{i\omega t}$

$$Z = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0}{I_0} = |Z|e^{i\phi} \qquad Z_R = R \qquad Z_L = i\omega L \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

## Elektromagnetiske bølger:

Bølgelikningen for $\vec{E}$: $\nabla^2 \vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ $\quad$ der $\quad \nabla^2 \vec{E} = \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\,\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}\,\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\,\hat{\mathbf{k}}$ $\quad$ og $\quad \dfrac{1}{c^2} = \mu\epsilon$

Bølge i $\pm x$-retning med $\vec{E}$ planpol. i $y$-retning: $\vec{E}(x,t) = E_0\,\hat{\mathbf{j}}\,\cos(\omega t \mp kx)$, $\quad \vec{B}(x,t) = B_0\,\hat{\mathbf{k}}\,\cos(\omega t \mp kx)$

med $\quad \omega = 2\pi f \quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad |c| = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{1}{\mu\epsilon}} \quad B_0 = \pm\dfrac{E_0}{c}$ $\quad$ Bølge(vandre)retning som $\vec{E} \times \vec{B}$

## Nablaoperatoren:

*Kartesiske koordinater $(x, y, z)$, med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\mathrm{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

*Sylinderkoordinater $(r, \phi, z)$, med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ :*

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

*Kulekoordinater $(r, \theta, \phi)$, med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ :*

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

*Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$:*

$$\oiint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\;\mathrm{d}\tau \qquad\qquad \oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

*Infinitesimale volumelement:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\tau &= r^2\,\mathrm{d}r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \;\xrightarrow{\text{kulesymmetri}}\; 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\tau &= r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \;\xrightarrow{\text{syl.symmetri}}\; 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\ell
\end{aligned}$$

Studieprogram: ____________

Kandidat nr. ____________

Dato: ________ Side*): ____

Antall ark: ____________

**Svartabell for flervalgsspørsmål i oppgave 1.**

*Denne siden fylles ut, rives av og leveres inn, *)* **fortrinnsvis som side 1.**
*Husk informasjonen øverst til høyre.*

| Oppgave | Mitt svar |
|---|---|
| 1-1 | |
| 1-2 | |
| 1-3 | |
| 1-4 | |
| 1-5 | |
| 1-6 | |
| 1-7 | |
| 1-8 | |
| 1-9 | |
| 1-10 | |
| 1-11 | |
| 1-12 | |
| 1-13 | |
| 1-14 | |
| 1-15 | |
| 1-16 | |