NTNU
Det skapende universitet

Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i
TFY4155 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk v/Arne Mikkelsen,
Tlf.: 486 05 392

Eksamensdato: Tirsdag 4. aug. 2015
Eksamenstid: 09:00 - 13:00
Tillatte hjelpemidler (kode C):
Bestemt enkel godkjent kalkulator.
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelark.

Annen informasjon:
1. Denne eksamen teller 90 % på endelig karakter, laboratorierapport 10 %. For studenter med laboratorium godkjent 2012 og før teller denne eksamen 100 %.

2. Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen (summerer til 100 %).

3. Noen generelle faglige merknader:
- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

4. I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**
5. Svar på flervalgsspørsmålene fører du på **siste ark** i dette oppgavesettet. Arket skal innleveres.

6. Oppgavene er utarbeidet av Arne Mikkelsen.

Målform/språk: Bokmål.

Antall sider (inkludert denne forsida): 6.

Antall sider vedlegg: 3.

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 35 %)

1-1. Hvis et dielektrisk materiale blir satt inn mellom platene i en parallellplatekondensator når den er forbundet til en spenningsforsyning på 100 V, vil

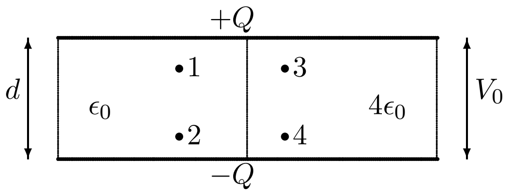
A) spenningen over kondensatoren avta
B) elektrisk felt mellom platene avta
C) elektrisk felt mellom platene øke
D) ladningen på kondensatoren avta
E) ladningen på kondensatoren øke

1-2. Potensialet på et uendelig stort positivt ladd plan er +20 V. Planet har en uniform ladningstetthet +2 nC/m^2 og er omgitt av luft. I hvilken avstand fra planet er da $V = 0$?

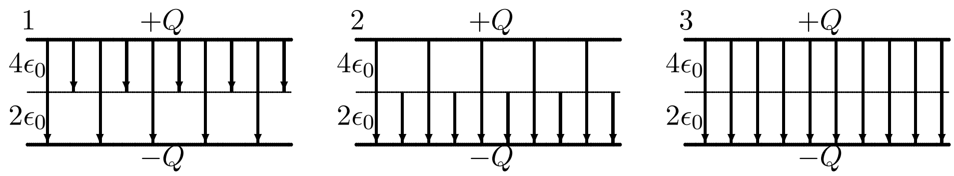
A) ∞ (uendelig)
B) V er alltid positiv
C) 9 cm
D) 18 mm
E) 18 cm

1-3. To parallelle metallplater har stor lineær utstrekning i forhold til avstanden d mellom platene. Øverste plate har positiv totalladning Q og potensial V_0, nederste plate har negativ totalladning $-Q$ og potensial 0. Venstre halvdel av rommet mellom platene er fylt med luft med permittivitet ϵ_0. Høyre halvdel av rommet mellom platene er fylt med et dielektrikum med permittivitet $4\epsilon_0$. I figuren er det angitt fire posisjoner $j = 1, 2, 3, 4$. Hva er riktig rangering av potensialene V_j i disse fire posisjonene?

A) $V_3 > V_1 > V_2 > V_4$
B) $V_3 > V_1 > V_4 > V_2$
C) $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$
D) $V_1 = V_3 > V_2 = V_4$
E) $V_1 = V_3 < V_2 = V_4$



1-4. Rommet mellom to store parallelle plater med ladning henholdsvis Q (øverste) og $-Q$ (nederst) er fylt med to dielektriske materialer, i øvre halvdel et dielektrikum med relativ permittivitet 4 og i nedre halvdel et dielektrikum med relativ permittivitet 2.



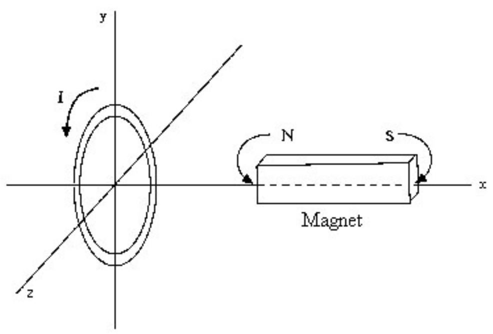
De tre figurene angir da feltlinjer for

A) $\vec{E}$ i 1 $\vec{D}$ i 2 $\vec{P}$ i 3
B) $\vec{D}$ i 1 $\vec{P}$ i 2 $\vec{E}$ i 3
C) $\vec{P}$ i 1 $\vec{E}$ i 2 $\vec{D}$ i 3
D) $\vec{E}$ i 1 $\vec{P}$ i 2 $\vec{D}$ i 3
E) $\vec{P}$ i 1 $\vec{D}$ i 2 $\vec{E}$ i 3

1-5. Ei kompassnål befinner seg i et homogent magnetisk felt med dens sydpol pekende i positiv retning av $\vec{B}$. Nettokrafta på kompassnåla

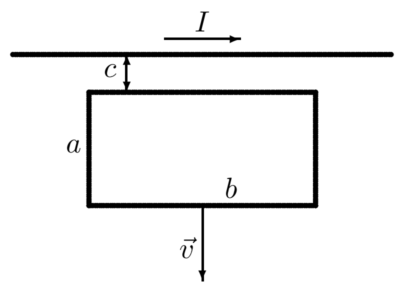
A) virker i samme retningen som $\vec{B}$.
B) virker i retning rett vinkel med $\vec{B}$.
C) virker i retning rett vinkel med planet gjennom $\vec{B}$ og kompassnåla.
D) virker i motsatt retning av $\vec{B}$.
E) er lik null.

1-6. En kopperring ligger i yz-planet som vist. Magnetens langakse N-S ligger langs x-aksen og feltlinjer løper utvendig fra N- til S-pol. Strøm i ringen indusert pga. magneten, har retning som vist i figuren med retning nedover i den delen av ringen som vender mot oss.



A) Magneten må bevege seg bort fra ringen.
B) Magneten må bevege seg mot ringen.
C) Magneten må bevege seg hverken fra eller mot ringen.
D) Det er ikke nødvendig at magneten beveger seg.
E) Magneten må holdes i ro for å opprettholde strømmen.

1-7. En rektangulær sløyfe med sidekanter a og b er plassert parallellt med en lang rett strømførende leder som vist i figuren. Den rette lederen fører en strøm I mot høyre og avstanden mellom lederen og den nærmeste sidekanten av sløyfa er c. Strømmen i den rette lederen øker jamt med tida: $I(t) = I_0 + kt$ (der k er en konstant med enhet A/s). Strømmen indusert i den rektangulære sløyfa



A) går mot klokka og er proporsjonal med k^2
B) går med klokka og er proporsjonal med k^2
C) går mot klokka og er proporsjonal med k
D) går med klokka og er proporsjonal med k
E) er lik null.

1-8. Maxwell generaliserte Amperes lov slik at den inkluderer forskyvningsstrøm, og loven lyder da

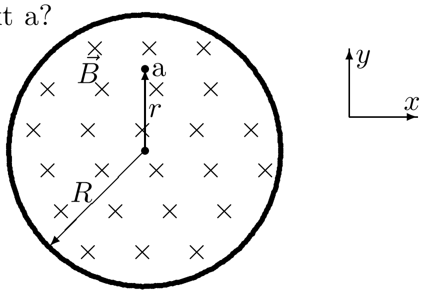
$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\,.$$

I denne likningen er forskyvningsstrømmen definert

A) $I + \epsilon_0 \dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}$ B) I C) $\epsilon_0 \displaystyle\int \left(\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) \mathrm{d}t$ D) $\epsilon_0 \dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}$ E) $\epsilon_0 \Phi_E$

1-9. Figuren viser tverrsnittet av en lang, rett solenoide med et homogent magnetfelt B innnvendig. Magnetfeltet har retning ned i tegneplanet og styrken er økende med tida. Hva er retningen for den elektriske krafta på en positivt ladd partikkel i ro ved punkt a?

A) $-x$-retning
B) $-y$-retning
C) $+y$-retning
D) $+x$-retning
E) krafta er null.

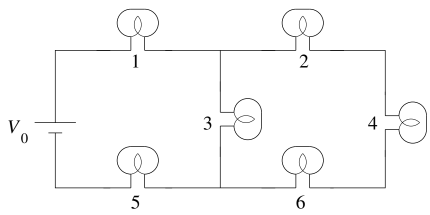


1-10. En tett viklet solenoide er 15 cm lang, har 350 viklinger, fører en strøm 3,0 A og har en aluminiumskjerne med magnetisk susceptibilitet $\chi_{\mathrm{m}} = 2,3 \cdot 10^{-5}$. Hvis du ser bort fra endeeffekter, vil du finne at verdien til magnetisk flukstetthet B i sentrum er omtrentlig

A) 8,80 mT
B) 8,80 mA/m
C) 7000 mT
D) 202 mA/m
E) 0,0 mT

1-11. Hver av de seks lyspærene i figuren nedenfor kan betraktes som en ideell ohmsk motstand R. Økt spenning over ei lyspære (og dermed økt strømstyrke) gir økt lysstyrke i lyspæra. Hva skjer med lysstyrken i pære 1 dersom pære 2 skrus ut?

A) Uendra
B) Lyser svakere
C) Lyser sterkere
D) Slokker
E) Pæra eksploderer

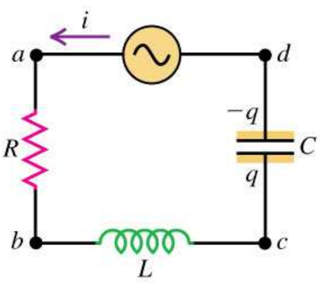


1-12. Hva er impedansen til en kondensator med kapasitans 200 nF når den er koplet til en vekselspenningskilde med vinkelfrekvens $1,00 \cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$?

A) 0,2 Ω
B) 1,8 Ω
C) 3,4 Ω
D) 5,0 Ω
E) 7,8 Ω.

1-13. Kretsen i figuren består av en vekselspenningskilde (AC) og en seriekopling av en resistor, induktans og en kondensator med endelige verdier. Kretsstrømmen (angitt med i) har en veldig liten amplitude når kilden har en veldig lav frekvens $\omega \to 0$. Hvilket kretselement er årsak til dette?

A) Resistansen R
B) Induktansen L
C) Kapasitansen C
D) En kombinasjon av L og C
E) Villedende spørsmål - strømmen har en stadig stigende amplitude når frekvensen er veldig høy.



1-14. I vakuum har et visst rødt lys en bølgelengde på 700 nm og fiolett lys en bølgelengde på 400 nm. Dette betyr at

A) rødt lys har høyere frekvens og beveger seg fortere enn fiolett lys
B) rødt lys har høyere frekvens og beveger seg langsommere enn fiolett lys
C) rødt lys har lavere frekvens og beveger seg fortere enn fiolett lys
D) rødt lys har lavere frekvens og beveger seg langsommere enn fiolett lys
E) ingen av alternativene over er rett.

Oppgave 2. Ladde kuler (teller 27 %)

a) Ei metallkule med radius R_1 er tilført en netto ladning Q. Hvorfor vil ladningen fordele seg på kulas overflate og hvorfor er det rimelig å anta den samme flateladningstettheten over hele overflata?

Det elektriske feltet fra kulas overflate og utover ($r \geq R_1$) kan uttrykkes

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\ .$$

b) Finn uttrykk for det elektrostatiske potensial $V(r)$ for **alle** r. Referanse for V er i uendelig avstand. Finn også et uttrykk for den totale elektrostatiske energien U av ladningsfordelingen.

Den samme ladningen Q skal nå fordeles på **to** metallkuler med radier henholdsvis R_1 og R_2. Dvs. $Q = Q_1 + Q_2$ der Q_1 er ladningen på kule 1 og Q_2 ladningen på kule 2. Anta at kulene er så langt fra hverandre at ladningsfordelingen på den ene kula ikke påvirkes av ladningen på den andre kula, og anta at den gjensidige elektrostatiske energien mellom kulene kan neglisjeres. Ladningene Q_1 og Q_2 fordeler seg slik at den **totale** elektrostatiske energien U blir **minst** mulig.

c) Finn ladningene Q_1 og Q_2 uttrykt ved Q, R_1 og R_2.

d) Hva blir spenningen (potensialforskjellen) mellom kulene når ladningen er fordelt på denne måten?

Oppgave 3. Magnetfelt (teller 26%)

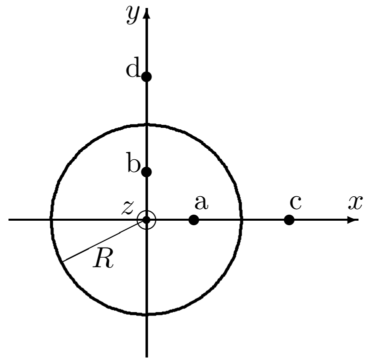
En tilnærmet uendelig lang og rett sylinderformet leder med radius R fører en elektrisk strøm som ikke varierer med tida. Strømtettheten (strøm per flateenhet) i lederen avtar lineært med avstanden r fra lederens senterakse:

$$\vec{J}(r) = J_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)\hat{\mathbf{k}}\ .$$

Vi har valgt koordinatsystem slik at lederens senterakse sammenfaller med z-aksen, og slik at strømmen går i positiv z-retning. Permeabiliteten er μ_0 overalt.

a) Finn total strøm I_0 i lederen uttrykt med bl.a. J_0.

Figuren til høyre er et snitt gjennom lederen i xy-planet, slik at z-aksen går opp av planet og dermed strømmen I kommer opp av planet.



b) Tegn vektorer som illustrerer magnetfeltet $\vec{B}$ i de fire angitte punktene a, b, c og d på henholdsvis positiv x- og y-akse i avstander henholdsvis $R/2$ og $3R/2$ fra senteraksen.

c) Bruk Amperes lov til å finne magnetfeltet $B_{\mathrm{u}}(r)$ utenfor den strømførende lederen ($r > R$), uttrykt med bl.a. J_0 og R.

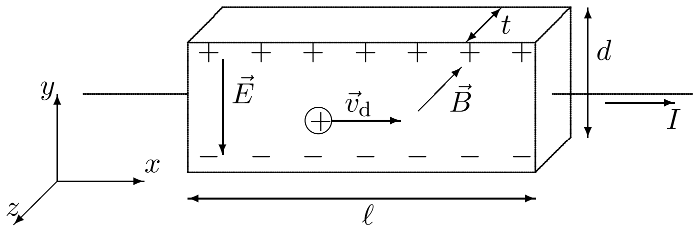
d) Magnetfeltet inni den strømførende lederen ($r < R$) er oppgitt til å være

$$B_{\mathrm{i}}(r) = C_1 \cdot r + C_2 \cdot r^2 .$$

Bruk Amperes lov til å bestemme konstantene C_1 og C_2, uttrykt med bl.a. J_0.

Oppgave 4. Hallprobe (teller 12 %)

En Hallprobe består av et halvledermateriale og har form som vist i figuren (ikke i skala) med lengde ℓ = 40 mm, tykkelse t = 0,15 mm og høyde d = 20 mm. Strømmen I føres i lengderetning og kan antas fordelt med homogen strømtetthet J over ledertverrsnittet $A = d{\cdot}t$. Halvledermaterialet har positive ladningsbærere $q = +e$ og med ladningstetthet $n = 5{\cdot}10^{20}$ m^{-3}.



Proben brukes til å måle styrken på et magnetfelt B som antas homogent og rettet i $-z$-retning i koordinatsystemet vist i figuren. Figuren gir også noen flere nyttige opplysninger.

a) Med grunnlag i balanse mellom elektrisk og magnetisk kraft vis at Hallspenningen kan uttrykkes $V_{\mathrm{H}} = v_{\mathrm{d}} B d$. Vis klart i figuren hvor Hallspenningen måles.

b) V_{H} måles til 6,5 V når strømmen er I = 0,15 A. Hvor stort er magnetfeltet B?
OPPGITT: $J = q\,n\,v_{\mathrm{d}}$ med v_{d} lik driftsfart for ladning q.

Vedlegg: FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning.
I og $\vec{J}$ uten indeks er ledningsstrøm (conducting current), I_d og $\vec{J}_\mathrm{d}$ er forskyvningsstrøm (displacement current).

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12}$ $\quad \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$ $\quad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon$ $\quad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i}$ $\quad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\quad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i}$ $\quad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ $\quad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E$ $\quad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I + \epsilon\dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right)$ $\quad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\quad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\quad \mathrm{div}\vec{B} = 0$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Forskyvningsstrøm: $I_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\quad \vec{J}_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra $-$ til $+$) $\quad$ Polarisering: $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}}{\text{volum}}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = \vec{m} = I\vec{A}$ $\quad$ Magnetisering: $\vec{M} = \dfrac{\sum \vec{\mu}}{\text{volum}}$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$ $\quad \vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E}$ $\quad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E}$ $\quad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H}$ $\quad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H}$ $\quad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\displaystyle\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$, $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$, $\quad$ Relativt ∞: $V(r) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon r}$

Energi og energitetthet: $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\iiint V\mathrm{d}q$ $\quad$ Elektrisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ $\quad$ Magnetisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \dfrac{Q}{V}$ $\quad$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ $\quad$ Energi: $U = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\dfrac{A}{d}$ $\quad$ Parallellkopling: $C = \displaystyle\sum_i C_i$ $\quad$ Seriekopling: $\dfrac{1}{C} = \displaystyle\sum_i \frac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}$ $\quad$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ $\quad \mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \dfrac{I}{2\pi r}$ $\quad$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\dfrac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI$, $\quad R = \rho\dfrac{\ell}{A} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\ell}{A}$; $\quad P = VI$

$\sigma\vec{E} = \vec{J}$, der strømtetthet $= \vec{J} = nq\vec{v}_\mathrm{d}$ og $\vec{v}_\mathrm{d} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Induktans: $\mathcal{E} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\quad\mathcal{E}_2 = -M_{21}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$, $\quad M_{21} = M_{12}$ $\qquad$ Spoler: $L = N\dfrac{\Phi_B}{I}$ $\quad U = \dfrac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluks som er årsak til strømmen.

Kompleks AC-signal: $V(t) = V_0 e^{i\omega t} = |V_0|e^{i\alpha}e^{i\omega t}$ $\qquad I(t) = I_0 e^{i\omega t} = |I_0|e^{i\beta}e^{i\omega t}$

$$Z = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0}{I_0} = |Z|e^{i\phi} \qquad Z_R = R \qquad Z_L = i\omega L \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Elektromagnetiske bølger:

Bølgelikningen for $\vec{E}$: $\nabla^2\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ $\quad$ der $\quad\nabla^2\vec{E} = \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\hat{\mathbf{k}}$ $\quad$ og $\quad\dfrac{1}{c^2} = \mu\epsilon$

Bølge i $\pm x$-retning med $\vec{E}$ planpol. i y-retning: $\vec{E}(x,t) = E_0\,\hat{\mathbf{j}}\,\cos(\omega t \mp kx)$, $\quad\vec{B}(x,t) = B_0\,\hat{\mathbf{k}}\,\cos(\omega t \mp kx)$

med $\quad\omega = 2\pi f \qquad k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \qquad |c| = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{1}{\mu\epsilon}} \qquad B_0 = \pm\dfrac{E_0}{c}$ $\qquad$ Bølge(vandre)retning som $\vec{E}\times\vec{B}$

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x,y,z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\mathrm{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Sylinderkoordinater (r,ϕ,z), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

Kulekoordinater (r,θ,ϕ), med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$:

$$\oint\!\!\!\oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\;\mathrm{d}\tau \qquad\qquad \oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\tau &= r^2\,\mathrm{d}r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\tau &= r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\ell
\end{aligned}$$

Studieprogram: ______________

Kandidat nr. ______________

Dato: __________ Side*⁾: _____

Antall ark: ______________

Svartabell for flervalgsspørsmål i oppgave 1.

*Denne siden skal fylles ut, rives av og leveres inn, *)* **fortrinnsvis som side 1.**
Husk informasjonen øverst til høyre.

Oppgave	Mitt svar
1-1	
1-2	
1-3	
1-4	
1-5	
1-6	
1-7	
1-8	
1-9	
1-10	
1-11	
1-12	
1-13	
1-14	