BOKMÅL

Informasjon om eksamen
Les oppgavene nøye. Maksimalt antall poeng du kan oppnå på denne eksamen er 100. Maksimal poengsum per oppgave er gitt i parantes i oppgavetittelen. Lykke til.

Oppgave 1: elektromagnetiske bølger (7.5 poeng)
En TV-stasjon sender ut et sinussignal med en gjennomsnittlig effekt på 316 kW. Anta at bølgen brer seg uniformt ut i en halvkule over bakken. Betrakt så et hus 5.00 km unna antenna.

(a) Hva er det gjennomsnittlige trykket den elektromagnetiske bølgen utøver på en fullstendig reflekterende overflate på huset?

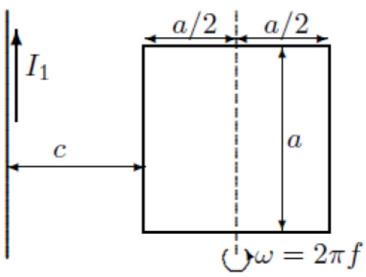
(b) Hva er amplitudene til det elektriske og magnetiske feltet ved huset?

(c) Hva er den gjennomsnittlige energitettheten til bølgen ved huset?

(d) Hvilken prosentandel av energitettheten i (c) kommer fra henholdsvis det elektriske og det magnetiske feltet?

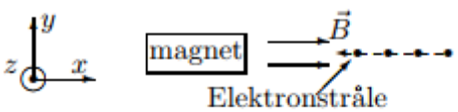
Oppgave 2: induksjon (10 poeng)
Gitt en uendelig lang, rett leder som fører strømmen I_1. En kvadratisk, tynn ledersløyfe med sidekant a plasseres med venstre sidekant i avstand c fra den rette lederen (se figur).

Sløyfa ligger i et plan gjennom den rette lederen og ligger så langt fra lederen ($c \gg a$) slik at vi kan anta at magnetfeltet som I_1 setter opp inni strømsløyfa er homogent og lik verdien i sentrum av sløyfen. Sløyfa roterer om en akse som går parallelt med I_1 og gjennom midtpunktet av sløyfa, som vist i figuren. Rotasjonsfrekvensen er f.



Finn et uttrykk for indusert elektromotorisk spenning i ledersløyfa.

Oppgave 3: bevegelse til ladede partikler (7.5 poeng)
(a) En elektronstråle går i retning rett mot venstre, i negativ x-retning i figuren. Du ønsker å stoppe elektronstrålen ved å plassere en magnet med nordpolen rett mot strålen, slik at magnetisk felt B fra magneten peker rett til høyre (x-retning) mot elektronstrålen. Elektroner er negativt ladd.



Beskriv bevegelsen til elektronet både med hensyn til retning og eventuell endring av fart.

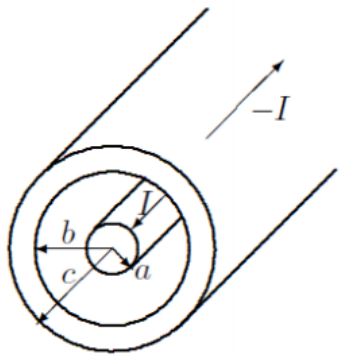
(b) Velg riktig(e) svaralternativ(er) til følgende utsagn: alle ladde partikler som passerer gjennom et elektrisk og magnetisk felt som er perpendikulære til hverandre uten å bli avbøyd har samme

A. masse
B. fart
C. bevegelsesmengde
D. energi
E. forhold mellom ladning og masse

Oppgave 4: Amperes lov (15 poeng)
Bruk Amperes lov på formen ($\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$)

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{encl}} \tag{1}$$

til å finne H-feltet i alle områder for en uendelig lang koaksialkabel som fører en strøm $+I$ i innerleder og $-I$ i ytterleder. Innerlederen er en massiv sylinder med radius a, ytterleder er en sylinder med innerradius b og ytterradius c. Mellom lederne er det elektrisk isolerende materiale med permeabilitet μ_0. Anta at kabelen ligger langs z-aksen og at strømmen er jevnt fordelt over tverrsnittet.

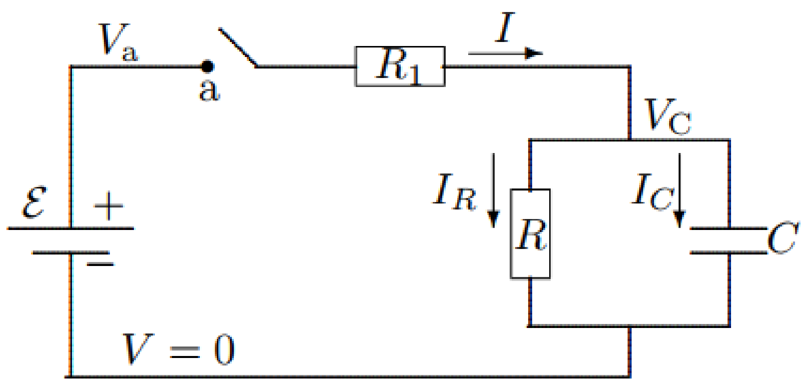


Beregn altså $H(r)$ for alle r og lag en skisse av $H(r)$.

Oppgave 5: kraftmoment i magnetfelt (10 poeng)
Ei kvadratisk ledersløyfe med sidekant a og strøm I er plassert i et homogent magnetfelt $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$. Flatenormalen $\mathbf{A} = a^2\mathbf{n}$ ligger i xz-planet og danner en vinkel θ med z-aksen. Sløyfa ligger med sentrum i origo. Du skal beregne de magnetiske krefters kraftmoment τ om y-aksen. Husk kraftmoment = "arm ganger kraft", $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Vis i en skisse retningen for den magnetiske krafta på hver av de fire rette lederstykkene. Hvilke av kreftene bidrar til kraftmomentet τ? Finn uttrykk for alle kreftene og beregn τ. Bruk kartesiske komponenter **i**, **j**, **k**.

Oppgave 6: DC kretser (15 poeng)
I kretsen i figuren settes bryteren i posisjon a ved tida $t = 0$. La spenninger og strømmer være som angitt i figuren. Kondensatoren har til enhver tid ladningen $Q_C(t)$. Ved $t < 0$ er $V_C = 0$ og dermed alle strømmer lik null (og $V_a = \mathscr{E}$).



(a) Finn uttrykk for følgende størrelser ved $t = 0^+$ (umiddelbart etter bryteren er slått på): V_C, Q_C, I_C, I_R, I.

(b) Finn uttrykk for de samme størrelser ved $t = \infty$ (etter svært lang tid).

(c) Finn uttrykk for de samme størrelser som funksjon av tida for $t > 0$.

Tips: Husk at strømmen til kondensatoren har følgende sammenheng med ladningen på kondensatoren: $I_C = dQ_C/dt$.

Oppgave 7: dielektrisk plate (15 poeng)
Figuren under viser tverrsnitt av ei dielektrisk (elektrisk isolerende) plate med permittivitet ε, total tykkelse $2t$ i z-retningen og uendelig utstrekning i x- og y-retningene.

Plata tilføres så en romladningstetthet gitt ved

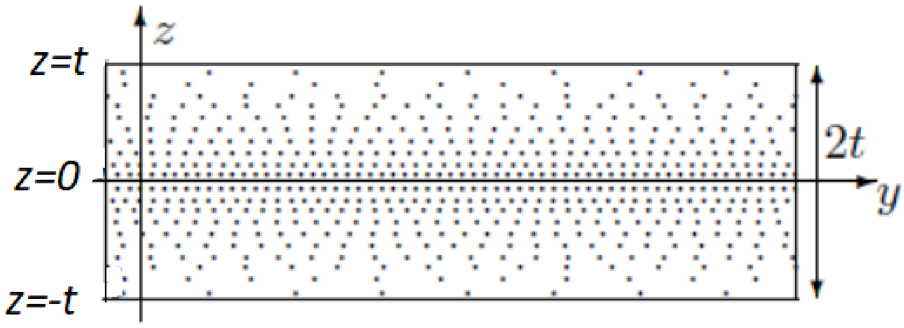
$$\rho(z) = \rho_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2t}\right) \tag{2}$$

der z er avstanden fra midtplanet i plata og ρ_0 er en konstant. Denne ladningstettheten er visualisert med punktmarkeringer og blir altså delvis skjermet i det dielektriske materialet. Plata er omgitt av luft med permittivitet ε_0.

(a) Beregn den elektriske feltstyrken **E** utenfor og inne i den dielektriske plata. Begrunn fremgangsmåten.

(b) Lag ei skisse av $|\mathbf{E}|$ som funksjon av z.

(c) Beregn det elektriske potensialet V utenfor og inne i plata. Velg nullreferansen for det elektriske potensialet midt inne i plata ($z = 0$).



(d) Lag ei skisse av $V(z)$ som funksjon av z.

Oppgave 8: elektrisk ladning og potensial (10 poeng)
To svært tynne, konsentriske, metalliske kuleskall har radier henholdsvis R og $3R/2$. Det indre skallet har ladningen q, og det ytre skallet har ladningen $-3q$.

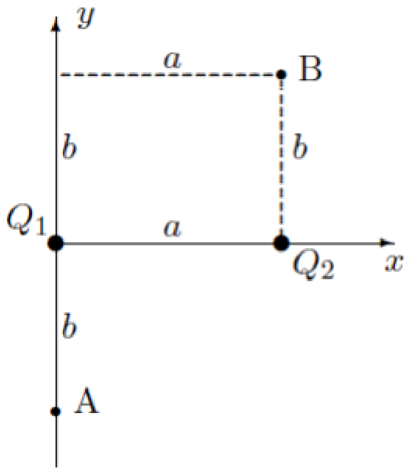
(a) Finn uttrykk for det elektriske feltet $\mathbf{E}(r)$ i alle deler av rommet.

(b) Hva er potensialdifferansen mellom skallene?

(c) Hvordan vil ladningen fordele seg dersom de to skallene forbindes med en tynn ledende tråd?

Oppgave 9: potensiell energi (10 poeng)
En punktladning Q_1 er plassert i origo og en punktladning Q_2 i $(x,y) = (a,0)$, som vist i figuren. Et elektron flyttes fra punkt $A = (0,-b)$ til punkt $B = (a,b)$. Hvor stor endring gir denne forflytningen i systemets potensielle energi?

("Systemet" = de to punktladningene og elektronet.)



Nyttige formler

Betydning til symboler og korrekt bruk av formler skal være kjent av studenten.

Maxwells lover, Lorentzkraft og magnetisk kraft:

$$
\begin{aligned}
&\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = Q/\varepsilon_0,\ \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0,\ \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0,\\
&\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},\ \nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t,\ \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0\Big(I+\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\Big),\\
&\mathbf{F} = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}),\ \mathbf{F} = I\mathbf{l}\times\mathbf{B}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Potensialforskjell, effekt og energi i kretser:

$$
\begin{aligned}
&v = iR,\ v = q/C,\ v = Ldi/dt,\\
&P = VI,\ U = \frac{1}{2}CV^2,\ U = \frac{1}{2}LI^2.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Resistans og kapasitans i kretser:

$$
\begin{aligned}
&R = \sum_i R_i,\ C = (\sum_i 1/C_i)^{-1},\\
&R = (\sum_i 1/R_i)^{-1},\ C = \sum_i C_i.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Elektrisk kraft, felt, potensial:

$$
F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\ \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r},\ \mathbf{E} = -\nabla V,\ E_j = -\frac{dV}{dj}\ (j = x,y,z).
\tag{6}
$$

Magnetiske og elektriske dipoler, potensiell energi, dreiemoment, fluks:

$$
U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E},\ \tau = \mathbf{p}\times\mathbf{E},\ U = -\mu\cdot\mathbf{B},\ \tau = \mu\times\mathbf{B},\ \mathbf{p} = q\mathbf{d},\ \mu = I\mathbf{A},\ \Phi_B = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}.
\tag{7}
$$

Elektromagnetiske bølger:

$$
\begin{aligned}
&p_{\text{radiation}} = I/c \text{ (for fullstendig absorberende overflate)},\ P_{\text{average}} = IA,\\
&I = \frac{E_m B_m}{2\mu_0},\ B = E/c,\ 1/c^2 = \varepsilon_0\mu_0,\ u = \varepsilon_0 E^2/2 + B^2/(2\mu_0).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Når man integrerer en størrelse $X = X(r)$ [avhenger kun av radius og ikke vinkler] over volumet til en kule, kan man bruke at:

$$
\int X\, dV = 4\pi \int X r^2\, dr
\tag{9}
$$

NYNORSK

Informasjon om eksamen
Les oppgåvene nøye. Maksimalt poengsum du kan oppnå på denne eksamenen er 100 . Maksimal poengsum per oppgåve er gjeven i parantes i oppgåvetittelen. Lykke til.

Oppgåve 1: elektromagnetiske bølgjer (7.5 poeng)
Ein TV-stasjon sender ut eit sinussignal med ein gjennomsnittleg effekt på 316 kW. Anta at bølgja brer seg uniformt ut i ei halvkule over bakken. Vurder så eit hus 5.00 km unna antenna.

(a) Kva er det gjennomsnittlege trykket den elektromagnetiske bølgja utøvar på ei fullstendig reflekterande overflate på huset?

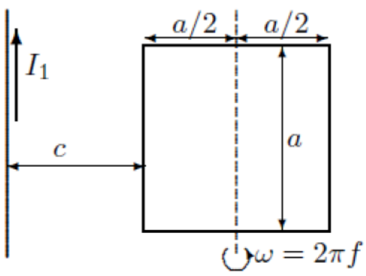
(b) Kva er amplitudane til det elektriske og magnetiske feltet ved huset?

(c) Kva er den gjennomsnittlege energitettleiken til bølgja ved huset?

(d) Kva for ein prosentdel av energitettleiken i (c) kjem frå høvesvis det elektriske og det magnetiske feltet?

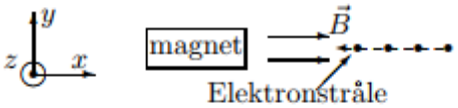
Oppgåve 2: induksjon (10 poeng)
Vurder ein uendeleg lang, rett leiar som fører straumen I_1. Ein kvadratisk, tynn ledersløyfe med sidekant a vert plassert med venstre sidekant i avstand c frå den rette leiaren (sjå figur).

Sløyfa ligg i eit plan gjennom den rette leiaren og liggar så langt frå leiaren ($c \gg a$) at vi kan anta at magnetfeltet som I_1 set opp inni strømsløyfa er homogent og lik verdien i sentrum av sløyfa. Sløyfa roterer om ein akse som går parallelt med I_1 og gjennom midtpunktet av sløyfa, som vist i figuren. Rotasjonsfrekvensen er f.



Finn eit uttrykk for indusert elektromotorisk spenning i ledersløyfa.

Oppgåve 3: rørsle til ladde partiklar (7.5 poeng)
(a) Ein elektronstråle går i retning rett mot venstre, i negativ x-retning i figuren. Du ynskjer å stoppa elektronstrålen ved å plassera ein magnet med nordpolen rett mot strålen, slik at magnetisk felt B frå magneten peikar rett til høgre (x-retning) mot elektronstrålen. Elektron er negativt ladde.



Skildre rørsla til elektronet både med omsyn til retning og eventuell endring av fart.

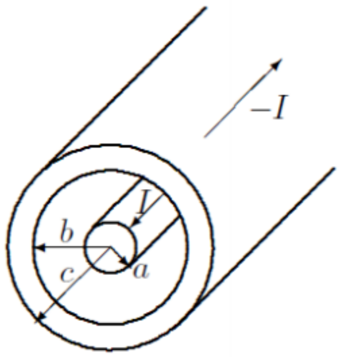
(b) Vel riktig(e) svaralternativ(er) til følgjande utsegn: alle ladde partiklar som passerer gjennom eit elektrisk og magnetisk felt som er perpendikulære til kvarandre utan å bli avbøyd har same

A. masse
B. fart
C. rørslemengd
D. energi
E. forhold mellom ladning og masse

Oppgåve 4: Amperes lov (15 poeng)
Bruk Amperes lov på forma ($\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$)

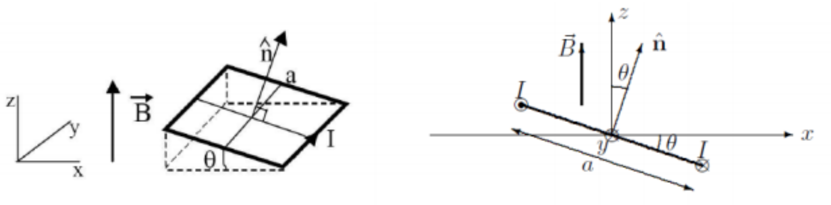
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{encl}} \tag{10}$$

til å finna H-feltet i alle område for ein uendeleg lang koaksialkabel som fører ein straum $+I$ i innerleder og $-I$ i ytterleder. Innerlederen er ein massiv sylinder med radius a, ytterleder er ein sylinder med innerradius b og ytterradius c. Mellom leiarane er det elektrisk isolerande material med permeabilitet μ_0. Anta at kabelen ligg langs z-aksen og at straumen er jamt fordelt over tverrsnittet.



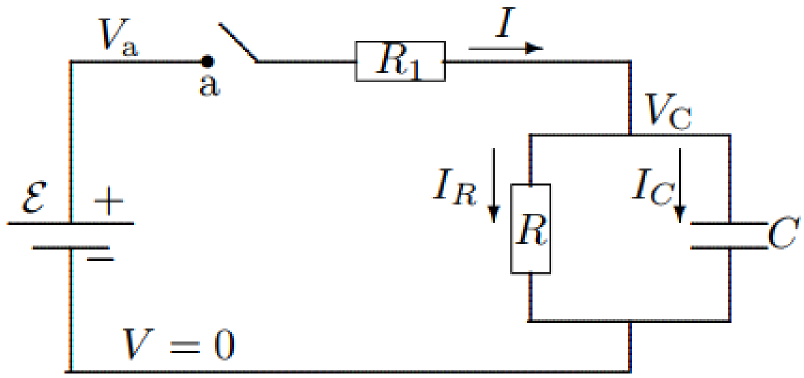
Berekn altså $H(r)$ for alle r og lag ein skisse av $H(r)$.

Oppgåve 5: kraftmoment i magnetfelt (10 poeng)
Ei kvadratisk ledersløyfe med sidekant a og straum I er plassert i eit homogent magnetfelt $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$. Flatenormalen $\mathbf{A} = a^2\mathbf{n}$ ligg i xz-planet og dannar ein vinkel θ med z-aksen. Sløyfa ligg med sentrum i origo. Du skal berekna kraftmomentet til dei magnetiske krefter τ om y-aksen. Hugs kraftmoment = "arm gonger kraft", $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.



Vis i ein skisse retninga for den magnetiske krafta på kvar av dei fire rette leiarstykka. Kva for av kreftene bidreg til kraftmomentet τ? Finn uttrykk for alle kreftene og berekn τ. Bruk kartesiske komponentar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Oppgåve 6: DC kretsar (15 poeng)
I kretsen i figuren vert brytaren sett i posisjon a ved tida $t = 0$. La spenningar og straumar vera som angjeve i figuren. Kondensatoren har til kvar og ei tid ladningen $Q_C(t)$. Ved $t < 0$ er $V_C = 0$ og dermed alle strøymer lik null (og $V_a = \mathscr{E}$).



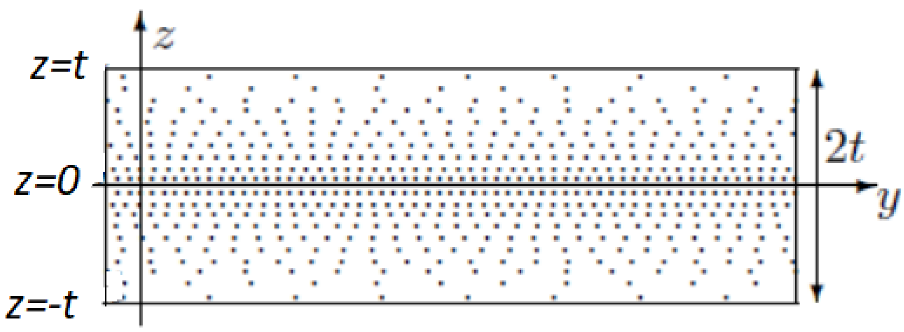
(a) Finn uttrykk for følgjande storleikar ved $t = 0^+$ (umiddelbart etter brytaren er slegen på): V_C, Q_C, I_C, I_R, I.

(b) Finn uttrykk for dei same storleikar ved $t = \infty$ (etter svært lang tid).

(c) Finn uttrykk for dei same storleikar som funksjon av tida for $t > 0$.

Tips: Hugs at straumen til kondensatoren har følgjande samanheng med ladningen på kondensatoren: $I_C = dQ_C/dt$.

Oppgåve 7: dielektrisk plate (15 poeng)
Figuren under viser tverrsnitt av ei dielektrisk (elektrisk isolerande) plate med permittivitet ε, total tykkelse $2t$ i z-retninga og uendeleg utstrekking i x- og y-retningane.



Plata tilførast så ein romladningstettleik gjeve ved

$$\rho(z) = \rho_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2t}\right) \tag{11}$$

der z er avstanden frå midtplanet i plata og ρ_0 er ein konstant. Denne ladningtettleiken er visualisert med punktmarkeringar og vert altså delvis skjerma i det dielektriske materialet. Plata er omgjeven av luft med permittivitet ε_0.

(a) Berekn den elektriske felttyrken $\mathbf{E}$ utanfor og inne i den dielektriske plata. Grunngje fremgangsmåten.

(b) Lag ei skisse av $|\mathbf{E}|$ som funksjon av z.

(c) Berekn det elektriske potensialet V utanfor og inne i plata. Vel nullreferansen for det elektriske potensialet midt inne i plata ($z = 0$).

(d) Lag ei skisse av $V(z)$ som funksjon av z.

Oppgåve 8: elektrisk ladning og potensial (10 poeng)
To svært tynne, konsentriske, metalliske kuleskal har radiusar høvesvis R og $3R/2$. Det indre skalet har ladningen q, og det ytre skalet har ladningen $-3q$.

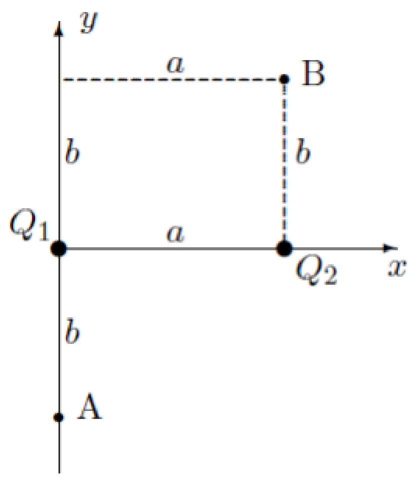
(a) Finn uttrykk for det elektriske feltet $\mathbf{E}(r)$ i alle delar av rommet.

(b) Kva er potensialdifferansen mellom skala?

(c) Korleis vil ladningen fordela seg dersom dei to skala vert forbunde med ein tynn leiande tråd?

Oppgåve 9: potensiell energi (10 poeng)
Ein punktladning Q_1 er plassert i origo og ein punktladning Q_2 i $(x,y) = (a,0)$, som vist i figuren. Eit elektron vert flytt frå punkt $A = (0,-b)$ til punkt $B = (a,b)$. Kor stor endring gjev denne forflytningen i den potensielle energien til systemet?

("Systemet" = dei to punktladningane og elektronet.)



Nyttige formlar

Tyding til symbol og korrekt bruk av formlar skal kjennast av studenten.

Maxwells lovar, Lorentzkraft og magnetisk kraft:

$$\begin{aligned}
&\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = Q/\varepsilon_0,\ \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0,\ \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0,\\
&\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},\ \nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t,\ \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0\Big(I+\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\Big),\\
&\mathbf{F} = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}),\ \mathbf{F} = I\mathbf{l}\times\mathbf{B}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Potensialskilnad, effekt og energi i kretsar:

$$\begin{aligned}
&v = iR,\ v = q/C,\ v = Ldi/dt,\\
&P = VI,\ U = \frac{1}{2}CV^2,\ U = \frac{1}{2}LI^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Resistans og kapasitans i kretsar:

$$\begin{aligned}
&R = \sum_i R_i,\ C = (\sum_i 1/C_i)^{-1},\\
&R = (\sum_i 1/R_i)^{-1},\ C = \sum_i C_i.
\end{aligned} \tag{14}$$

Elektrisk kraft, felt, potensial:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\ \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r},\ \mathbf{E} = -\nabla V,\ E_j = -\frac{dV}{dj}\ (j = x,y,z). \tag{15}$$

Magnetiske og elektriske dipolar, potensiell energi, dreiemoment, fluks:

$$U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E},\ \tau = \mathbf{p}\times\mathbf{E},\ U = -\mu\cdot\mathbf{B},\ \tau = \mu\times\mathbf{B},\ \mathbf{p} = q\mathbf{d},\ \mu = I\mathbf{A},\ \Phi_B = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}. \tag{16}$$

Elektromagnetiske bølgjer:

$$\begin{aligned}
&p_{\text{radiation}} = I/c \text{ (for fullt absorberande overflate)},\ P_{\text{average}} = IA,\\
&I = \frac{E_m B_m}{2\mu_0},\ B = E/c,\ 1/c^2 = \varepsilon_0\mu_0,\ u = \varepsilon_0 E^2/2 + B^2/(2\mu_0).
\end{aligned} \tag{17}$$

Når ein integrerer ein storleik $X = X(r)$ [avheng berre av radius og ikkje vinklar] over volumet til ei kule, kan ein bruka at:

$$\int X\, dV = 4\pi \int X r^2\, dr \tag{18}$$

ENGLISH

Information about the exam
Read the problem texts carefully. The maximum number of points you can achieve on this exam is 100. The maximum number of points you can achieve on a given problem is shown in the parantheses in the problem title. Good luck.

Problem 1: electromagnetic waves (7.5 points)
A TV-station emits a sinusoidal electromagnetic signal with average power 316 kW. Assume that the wave expands uniformly into a hemisphere above the ground. Consider now a house 5.00 km away from the antenna of the TV-station.

(a) What is the average pressure that the electromagnetic wave exerts on a completely reflective surface on the house?

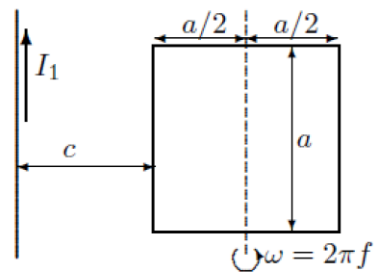
(b) What are the amplitudes of the electric and magnetic fields at the house?

(c) What is the average energy density of the wave at the house?

(d) Which percentage of the energy density in (c) comes from the electric field and which percentage comes from the magnetic field?

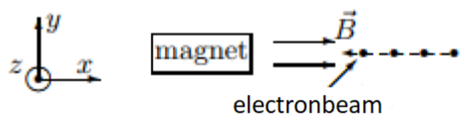
Problem 2: induction (10 points)
Consider an infinitely long, straight conductor in which a current I_1 exists. A quadratic, thin conductive loop with side a is placed with its left side at a distance c from the straight conductor (see the figure).

The loop lies in a plane that passes through the straight conductor and is located so far from the conductor ($c \gg a$) that we may assume that the magnetic field which I_1 establishes inside the loop is homogeneous and equal to its value at the center of the loop. The loop rotates around an axis parallel to I_1 which goes through the center of the loop (see figure). The frequency of rotation is f.



Derive an expression for the induced electromotive force in the conductive loop.

Problem 3: motion of charged particles (7.5 points)
(a) An electron beam is directed left, in the negative x-direction. You seek to stop this electron beam by placing a magnetic with its northpole directly facing the beam, so that a magnetic field B from the magnetic points toward right (positive x-direction, in effect opposite the electron beam). Recall that electrons are negatively charged.



Describe the motion of the electron both with respect to its direction and any change in velocity.

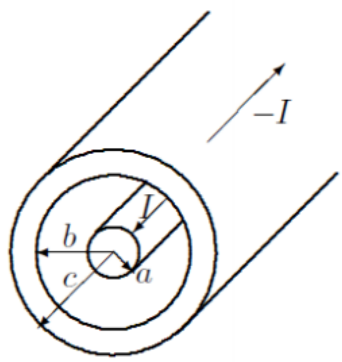
(b) Choose the correct alternative(s) for the following statement: all charged particles that pass through a region with electric and magnetic fields perpendicular to each other without changing their trajectories have the same

A. mass
B. velocity
C. momentum
D. energy
E. ratio between charge and mass

Problem 4: Ampere's law (15 points)
Use Ampere's law, written as ($\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$)

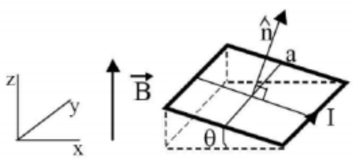
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{encl}} \tag{19}$$

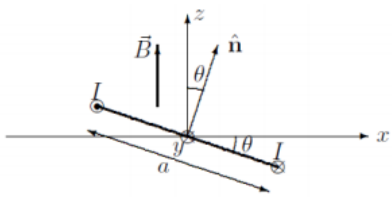
to derive an expression for the H-field in all areas of an infinitely long coaxial cable. The cable carries a current $+I$ in its inner conducting region and $-I$ in its outer conducting region. The inner conducting region is a massive cylinder with radius a whereas the outer conducting region is a cylinder with inner radius b and outer radius c. Between the conducting regions exists an electrically insulating material with permeability μ_0. Assume that the cable is positioned along the z-axis and that the current is evenly distributed over the cross-section.



Thus, derive an expression for $H(r)$ for all r and sketch the resulting behaviour of $H(r)$.

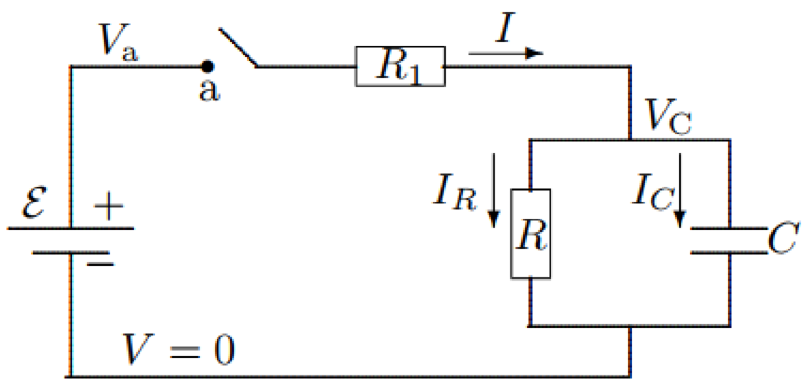
Problem 5: torque in a magnetic field (10 points)
A quadratic conducting loop with side a and current I is placed in a homogeneous magnetic field $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$. The normal vector to the loop-plane, $\mathbf{A} = a^2\mathbf{n}$, lies in the xz-plane at an angle θ with the z-axis. The loop lies with its center in the origin. Your task is to compute the torque τ around the y-axis resulting from the magnetic forces. Recall that torque = "arm times force", $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.





Show the direction of the magnetic force on each of the four straight conducting pieces. Which of the forces contribute to the torque τ? Derive an expression for the all the forces and compute τ. Use Cartesian components **i**, **j**, **k**.

Problem 6: DC circuits (15 points)
In the circuit shown in the figure, the switch is in position a at time $t = 0$. Define the voltages and currents as indicated in the figure. The capacitor has the charge $Q_C(t)$ at a given time t. At $t < 0$, $V_C = 0$ and thus all currents are equal to zero (and $V_a = \mathscr{E}$).



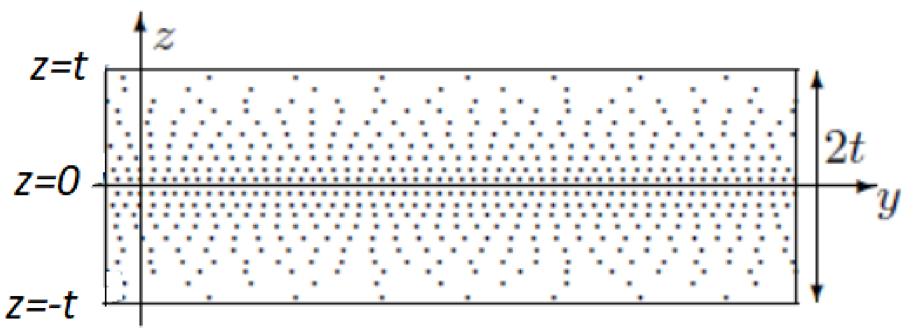
(a) Find an expression for the following quantities at $t = 0^+$ (immediately after the switch has been turned on): V_C, Q_C, I_C, I_R, I.

(b) Find an expression for the same quantities at $t = \infty$ (after a very long time).

(c) Find an expression for the same quantities as a function of time for $t > 0$.

Hint: Recall that the current to the capacitor has the following relation with the charge on the capacitor: $I_C = dQ_C/dt$.

Problem 7: dielectric plate (15 points)
The figure below shows the cross-section of a dielectric (electrically insulating) plate with permittivity ε, total thickness $2t$ in the z-direction and infinite extension in the x- and y-directions.



The plate is now imparted with a charge density distribution given by

$$\rho(z) = \rho_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2t}\right) \tag{20}$$

where z is the distance from the middle plane of the plate while ρ_0 is a constant. The charge density is visualized with points in the figure and is partially screened by the dielectric material. The plate is surrounded by air with permittivity ε_0.

(a) Compute the electric field strength $\mathbf{E}$ outside and inside the dielectric plate. Explain the steps in your derivation.

(b) Draw a sketch of how $|\mathbf{E}|$ behaves as a function of z.

(c) Compute the electric potential V outside and inside the plate. Choose the reference level (zero potential) for the electric potential in the middle of the plate ($z = 0$).

(d) Draw a sketch of how $V(z)$ behaves as a function of z.

Problem 8: electric field and potential (10 points)
Two very thin, concentric, metallic spherical shells have radii R and $3R/2$, respectively. The inner shell has a charge q while the outer shell has the charge $-3q$.

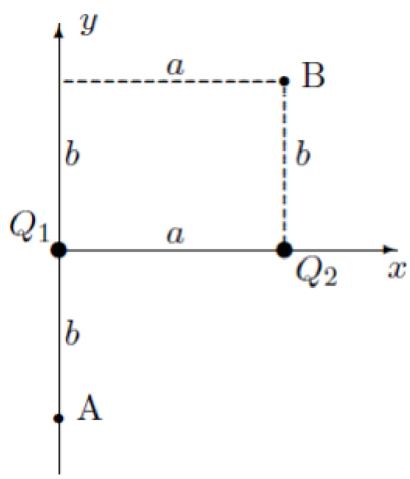
(a) Derive an expression for the electric field $\mathbf{E}(r)$ in all parts of space.

(b) What is the potential difference between the shells?

(c) How will the charge distribute itself if the two shells are connected via a thin conducting thread?

Problem 9: potential energy (10 points)
A point-charge Q_1 is placed in the origin of the coordinate system and a point-charge Q_2 is placed in $(x, y) = (a, 0)$, as shown in the figure. An electron is moved from point $A = (0, -b)$ to point $B = (a, b)$. How large change in the potential energy of the system does this movement cause?

(”System” = the two point-charges and the electron)



Useful formulas

The meaning of the symbols and the correct usage of the equations should be known by the student.

Maxwell's equations, Lorentz force, and magnetic force:

$$\begin{gathered}\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = Q/\varepsilon_0,\ \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0,\ \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0,\\ \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},\ \nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t,\ \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0\Big(I+\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\Big),\\ \mathbf{F} = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}),\ \mathbf{F} = I\mathbf{l}\times\mathbf{B}.\end{gathered} \tag{21}$$

Potential difference, power, and energy in circuits:

$$\begin{gathered}v = iR,\ v = q/C,\ v = Ldi/dt,\\ P = VI,\ U = \frac{1}{2}CV^2,\ U = \frac{1}{2}LI^2.\end{gathered} \tag{22}$$

Resistance and capacitance in circuits:

$$\begin{gathered}R = \sum_i R_i,\ C = (\sum_i 1/C_i)^{-1},\\ R = (\sum_i 1/R_i)^{-1},\ C = \sum_i C_i.\end{gathered} \tag{23}$$

Electric force, field, and potential:

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\ \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r},\ \mathbf{E} = -\nabla V,\ E_j = -\frac{dV}{dj}\ (j = x,y,z). \tag{24}$$

Magnetic and electric dipoles, potential energy, torque, flux:

$$U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E},\ \tau = \mathbf{p}\times\mathbf{E},\ U = -\mu\cdot\mathbf{B},\ \tau = \mu\times\mathbf{B},\ \mathbf{p} = q\mathbf{d},\ \mu = I\mathbf{A},\ \Phi_B = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}. \tag{25}$$

Electromagnetic waves:

$$\begin{gathered}p_{\text{radiation}} = I/c \text{ (for fully absorbing surface)},\ P_{\text{average}} = IA,\\ I = \frac{E_mB_m}{2\mu_0},\ B = E/c,\ 1/c^2 = \varepsilon_0\mu_0,\ u = \varepsilon_0E^2/2 + B^2/(2\mu_0).\end{gathered} \tag{26}$$

Integrating a quantity $X = X(r)$ [only depends on radius and not angles] over the volume of a sphere yields

$$\int X\, dV = 4\pi\int Xr^2\, dr \tag{27}$$