NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

EKSAMEN
TFY4150 ELEKTROMAGNETISME
FY 1303 (MNFFY 103) ELEKTRISITET OG MAGNETISME
Tirsdag 2. desember 2003 kl. 0900 - 1500
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Side 2 - 9: Oppgave 1 - 6.
Vedlegg 1 - 3: Formelsamling.

Eksamen består av 10 deloppgaver (1, 2, 3a, 3b, 3c, 4a, 4b, 5a, 5b, 6) som alle teller like mye under bedømmelsen. Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer i oppgaveteksten. Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er luft (vakuum), med permittivitet $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

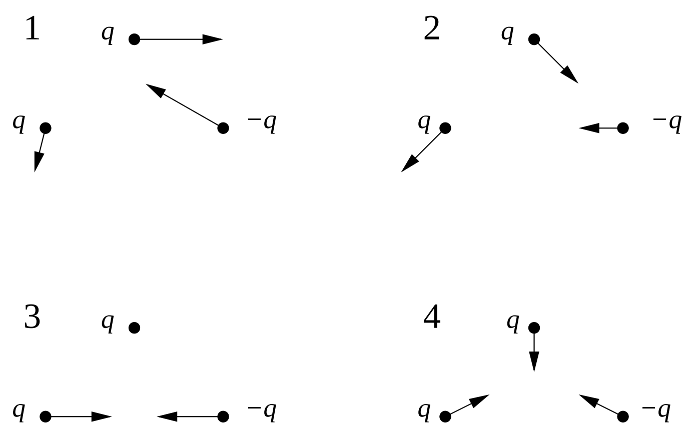
Sensuren kan ventes ca 19. desember.

OPPGAVE 1

Denne oppgaven består av 5 delspørsmål med 4 svaralternativ på hver, hvorav kun ett er riktig. Hvert delspørsmål *skal* besvares med *en* bokstav, A, B, C eller D. Hvert riktige svar gir 2 poeng. Feil svar, fravær av svar eller mer enn ett svar pr delspørsmål gir 0 poeng. Svarene skal *ikke* begrunnes. (Her gis det altså *ikke* minuspoeng for feil svar, så det lønner seg uansett å tippe!)

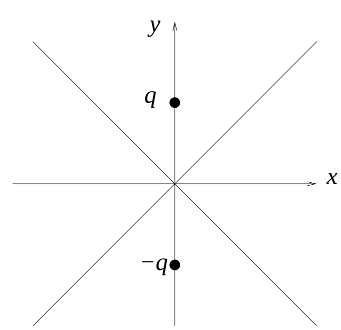
(i) Du har 3 punktladninger q, q og $-q$. Avstanden mellom de to nederste er en faktor $\sqrt{2}$ større enn avstanden fra den øverste til hver av de to nederste. Pilene angir kraften på en gitt ladning fra de to andre ladningene. Hvilken figur angir korrekte krefter?

A 1
B 2
C 3
D 4



(ii) Figuren viser 2 punktladninger q og $-q$ plassert på y-aksen symmetrisk i forhold til x-aksen. Hvor har vi da konstant potensial V?

A På linjen $x = y$
B På linjen $x = -y$
C På y-aksen
D På x-aksen

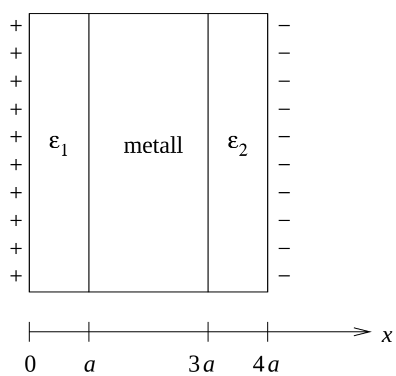


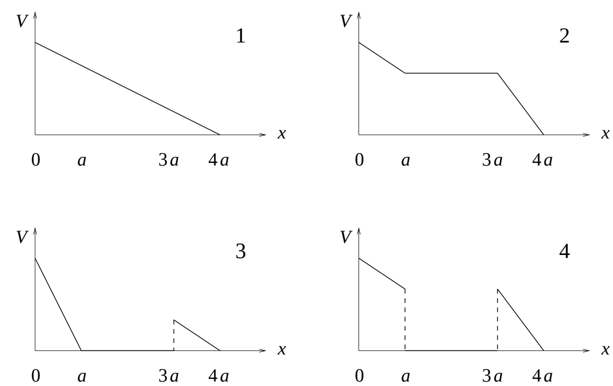
(iii) Hvilket av disse feltene er et mulig konservativt elektrostatisk felt? (k = positiv konstant)

A $\boldsymbol{E} = kz\,\hat{x}$
B $\boldsymbol{E} = ky\,\hat{x}$
C $\boldsymbol{E} = kx\,\hat{x}$
D $\boldsymbol{E} = kxy\,\hat{x}$

(iv) To tilnærmet uendelig store metallplater har uniform ladning $\pm\sigma$ pr flateenhet og er plassert i yz–planet, dvs i $x = 0$ (den positive), og i $x = 4a$ (den negative), som vist i figuren nedenfor til venstre. Rommet mellom platene er fylt med to dielektriske lag og et metall–lag, alle tre elektrisk nøytrale. Det dielektriske laget i rommet $0 < x < a$ har permittivitet $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$. Det dielektriske laget i rommet $3a < x < 4a$ har permittivitet $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$. Hvilken av de fire grafene i figuren nedenfor til høyre illustrerer da det elektriske potensialet V som funksjon av avstanden x fra den positivt ladete metallplata?

A 1
B 2
C 3
D 4





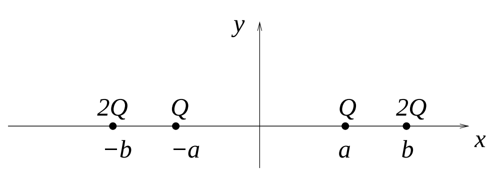
(v) Figuren nederst på siden viser 4 punktladninger beliggende på x-aksen. Det elektriske feltet på y-aksen $(y > 0)$ fra de 4 ladningene er

A $$\frac{Qy}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{(b^2+y^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2+y^2)^{3/2}}\right]$$

B $$\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{b^2+y^2} + \frac{1}{a^2+y^2}\right]$$

C $$\frac{Qaby}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{(b^2+y^2)^{5/2}} + \frac{1}{(a^2+y^2)^{5/2}}\right]$$

D $$\frac{3Q}{2\pi\varepsilon_0 y^2}$$

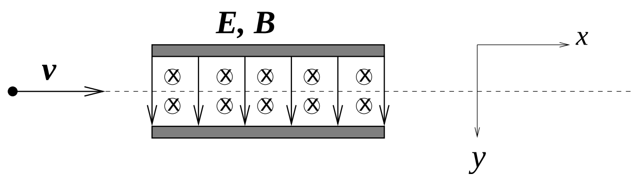


OPPGAVE 2

Denne oppgaven består av 5 delspørsmål med 4 svaralternativ på hver, hvorav kun ett er riktig. Hvert delspørsmål *skal* besvares med *en* bokstav, A, B, C eller D. Hvert riktige svar gir 2 poeng. Feil svar, fravær av svar eller mer enn ett svar pr delspørsmål gir 0 poeng. Svarene skal *ikke* begrunnes. (Her gis det altså *ikke* minuspoeng for feil svar, så det lønner seg uansett å tippe!)

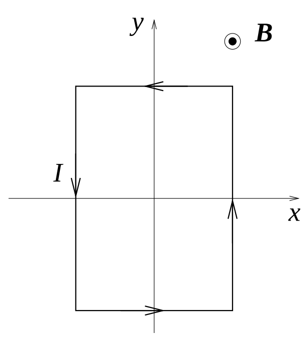
(i) Partikler, alle med ladning forskjellig fra null, med ulike masser og hastigheter (men alle med hastighet i positiv x-retning) kommer inn i et område der det elektriske feltet er $\boldsymbol{E} = E_0\ \hat{y}$ (nedover i figuren) mens magnetfeltet er $\boldsymbol{B} = B_0\ \hat{z}$ (inn i planet). Hvis $E_0 = 10$ kV/m og $B_0 = 50$ mT, må de partiklene som passerer gjennom området med elektrisk felt og magnetfelt *uten å avbøyes*

A være elektroner.
B være protoner.
C ha hastighet 500 m/s.
D ha hastighet 200 km/s.

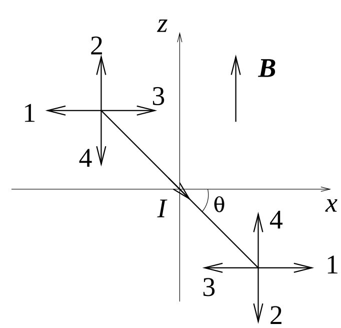


(ii) Ei kvadratisk ledersløyfe fører en strøm I og kan rotere omkring y-aksen. Den er plassert i et uniformt magnetfelt $\boldsymbol{B}$ rettet langs z-aksen. I figurene nedenfor betrakter vi ledersløyfa i henholdsvis xy-planet (til venstre) og xz-planet (til høyre). Ledersløyfas plan danner en vinkel θ med xy-planet, som vist i figuren til høyre. Hvilket av kraftparene nummerert fra 1 til 4 i figuren til høyre virker da på de to lengdene av ledersløyfa som ligger parallelt med y-aksen?

A 1
B 2
C 3
D 4

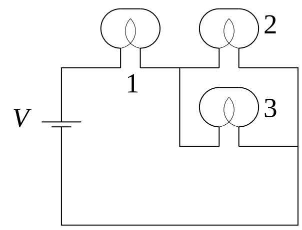


(z−aksen ut av planet)



(y−aksen inn i planet)

(iii) Tre identiske lyspærer, hver med motstand R, er koblet til et batteri med elektromotorisk spenning V. Hva skjer med lysstyrken i pære nummer 2 hvis vi skrur ut pære nummer 3? (Vi antar her at pærenes motstand R ikke avhenger av strømmen gjennom dem.)



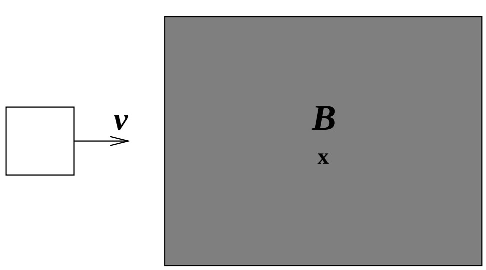
A Pære nummer 2 slokker.
B Pære nummer 2 lyser svakere.
C Pære nummer 2 lyser sterkere.
D Pære nummer 2 lyser like sterkt som før.

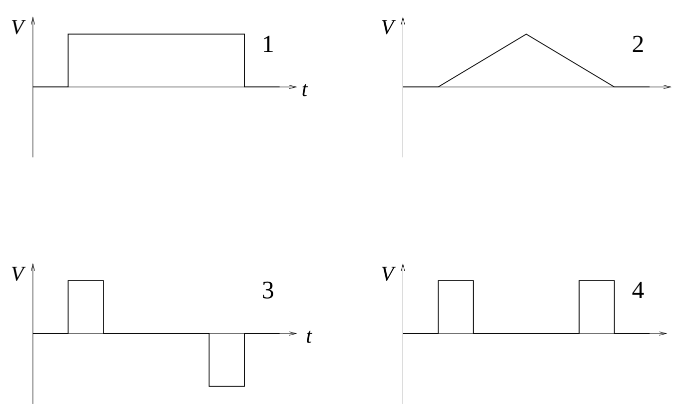
(iv) Bruk differensialformen av Gauss' lov for magnetfeltet til å avgjøre hvilket som *ikke* er et fysisk mulig magnetfelt. (k = positiv konstant)

A $\boldsymbol{B} = kx\,\hat{x}$
B $\boldsymbol{B} = ky\,\hat{x}$
C $\boldsymbol{B} = kz\,\hat{x}$
D $\boldsymbol{B} = kyz\,\hat{x}$

(v) Ei kvadratisk ledersløyfe trekkes med konstant hastighet $\boldsymbol{v}$ inn i, gjennom, og ut av et område med uniformt magnetfelt $\boldsymbol{B}$ med retning inn i planet (se figur nedenfor til venstre). Hvilken av grafene nedenfor til høyre representerer da det tilhørende tidsforløpet av den induserte elektromotoriske spenningen V i ledersløyfa?

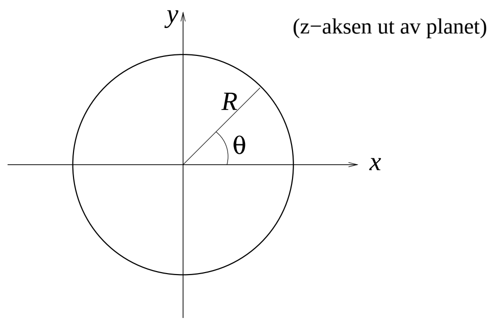
A 1
B 2
C 3
D 4





OPPGAVE 3

En tynn ring med radius R ligger i xy-planet med sentrum i origo.



Ringen har en ladning $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos\theta$ pr lengdeenhet, der θ angir vinkelen i forhold til x-aksen, som vist i figuren.

a) Bestem ringens totale ladning Q. Forklar, med utgangspunkt i symmetrisk (diagonalt) beliggende ladningselementer på ringen, $dq = \lambda\ dl = \lambda R\ d\theta$, hvorfor det elektriske feltet på z-aksen blir en vektor som peker i negativ x-retning. (Dvs: $\boldsymbol{E}(0,0,z) = -E_x(z)\ \hat{x}$, med $E_x(z) > 0$ og $\hat{x}$ = enhetsvektor i x-retning.) Tegn gjerne en figur eller to.

b) Bestem det elektriske feltet $E_x(z)$ på z-aksen.

Tips: En infinitesimal bit av ringen, $dl = R\ d\theta$, gir et bidrag $dE(\theta) = \lambda(\theta) R\ d\theta / 4\pi\varepsilon_0 r^2$ til feltet i en avstand r. Her trenger du projeksjonen av dE på x-aksen, og denne bestemmes kanskje enklest i to omganger: Først projeksjonen $(dE)_{xy}$ av dE på xy-planet og deretter projeksjonen dE_x av $(dE)_{xy}$ på x-aksen.

c) Langt unna ringen, dvs for $z \gg R$, kan det elektriske feltet på z-aksen uttrykkes ved ringens elektriske dipolmoment $p = |\boldsymbol{p}| = \pi\lambda_0 R^2$ og skrives på formen

$$E_x(z) \simeq \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 z^n} \qquad (z \gg R)$$

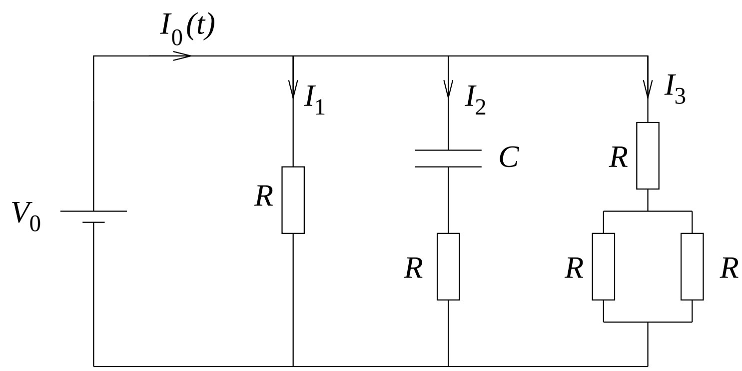
Vis dette og bestem derved (den heltallige) eksponenten n. (Uttrykket for p antas kjent og skal *ikke* utledes.)
Hvis du ikke har funnet et uttrykk for $E_x(z)$ i punkt *b*) som lar seg skrive på denne formen: Hva *tror du* n kan være når $E_x(z)$ er det elektriske feltet i stor avstand fra en elektrisk *dipol*?

Oppgitt:

$$\int \cos^2\theta\ d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \text{ konst.}$$

OPPGAVE 4

Vi skal se på følgende elektriske krets med motstander R, en platekondensator med kapasitans C, og en likespenningskilde V_0:



a) Vi betrakter i første omgang *stasjonære forhold*, dvs situasjonen "lenge etter" at spenningskilden er koblet inn, slik at ingen av strømmene i kretsen lenger varierer med tiden. Bestem strømstyrkene I_1, I_2 og I_3 samt ladningen $(\pm)$ Q på kondensatorplatene.

b) La oss deretter gå tilbake til tidspunktet ("for lenge siden") $t = 0$ da spenningskilden ble koblet til kretsen. Vi antar null ladning på kondensatoren før tilkobling av V_0. Umiddelbart etter tilkobling "leverer" spenningskilden en strøm $I_0(0)$. Ved stasjonære forhold $(t \to \infty)$ leverer spenningskilden en strøm $I_0(\infty)$. Strømmen $I_0(t)$ er angitt i figuren. Bestem forholdet

$$\frac{I_0(\infty)}{I_0(0)}$$

Tips: Bruk Kirchhoffs spenningsregel på sløyfa som inneholder V_0, C og R, og dessuten at $dQ(t)/dt = I_2(t)$ og $I_0(t) = I_1 + I_2(t) + I_3$.

(For ordens skyld: I denne oppgaven behøver du ikke å bekymre deg om eventuelle effekter som kunne tenkes å skyldes at kretsen har en viss selvinduktans. Med andre ord: Vi antar at kretsen har null selvinduktans.)

OPPGAVE 5

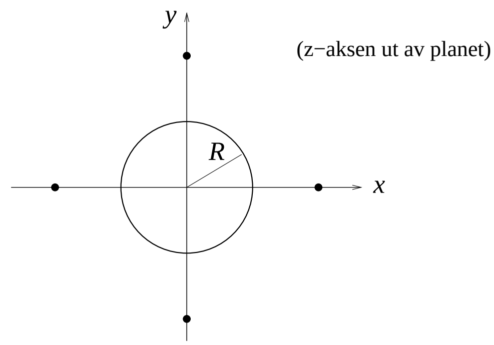
En tilnærmet uendelig lang og rett sylinderformet leder med radius R fører en elektrisk strøm. Strømtettheten (dvs: strøm pr flateenhet) i lederen varierer i denne oppgaven ikke med tiden, men avtar lineært med avstanden r fra lederens senterakse:

$$\boldsymbol{j}(r) = j_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \hat{z}$$

Vi har med andre ord valgt koordinatsystem slik at lederens senterakse sammenfaller med z-aksen, og slik at strømmen går i positiv z-retning.

a) Hva blir total strøm I i lederen?

Figuren nedenfor er et snitt gjennom lederen i xy-planet, slik at strømmen I kommer ut av planet.



Tegn vektorer som illustrerer magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ i de fire angitte punktene i avstand $2R$ fra senteraksen på henholdsvis positiv og negativ x- og y-akse.

b) Bruk Amperes lov til å bestemme magnetfeltet $B(r)$, både inne i ($r < R$) og utenfor ($r > R$) den strømførende lederen. Skisser B som funksjon av r. Finn ut hvor B har sin maksimale verdi.

Oppgitt:

$$I = \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A} = \int j \cdot dA \quad (\text{hvis } \boldsymbol{j} \parallel d\boldsymbol{A})$$

I polarkoordinater:

$$dA = r \; dr \; d\theta$$

Amperes lov:

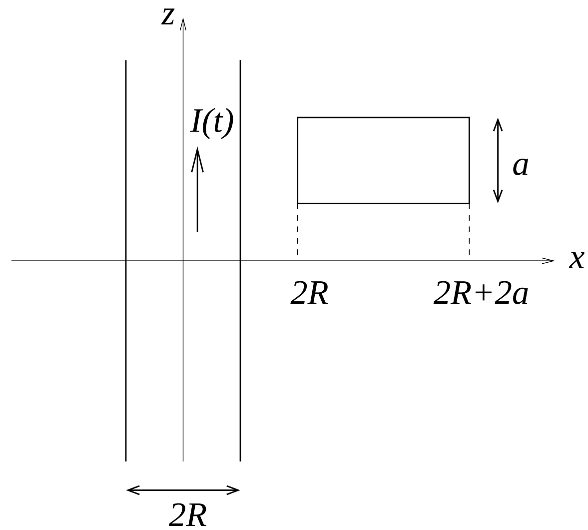
$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{in}}$$

OPPGAVE 6

Den rette lederen i oppgave 5 fører nå en *tidsavhengig* (og fremdeles sylindersymmetrisk) strøm $I(t)$. Resulterende magnetfelt utenfor lederen ($r > R$) oppgis da å være på formen

$$B(r,t) = C\,\frac{I(t)}{r}$$

der r (som i oppgave 5) er avstanden fra lederens senterakse og C er en konstant. En rektangulær ledersløyfe med sidekanter a og $2a$ ligger i xz-planet, som vist i figuren:



Bruk Faradays induksjonslov til å beregne hvor stor elektromotorisk spenning $\mathcal{E}(t)$ som induseres i den rektangulære ledersløyfa som følge av strømmen $I(t)$ i den rette lederen når denne varierer harmonisk med tiden,

$$I(t) = I_0 \cos \omega t,$$

med amplitude $I_0 = 20$ A og vinkelfrekvens $\omega = 10^4$ s^{-1}. Radien til den rette lederen er 1 cm, den rektangulære ledersløyfa har sidekanter 9 og 18 cm, og konstanten C har verdien $2 \cdot 10^{-7}$ Tm/A.

Oppgitt:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + \text{ konst.}$$

Formelsamling

$\int d\boldsymbol{A}$ angir flateintegral og $\int d\boldsymbol{l}$ angir linjeintegral. $\oint$ angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

Elektrostatikk

- Coulombs lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

- Elektrisk felt og potensial:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

- Elektrisk potensial fra punktladning:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Elektrisk fluks:

$$\phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss lov for elektrisk felt:

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{fri}}$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\text{fri}}$$

- Elektrostatisk felt er konservativt:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

- Elektrisk forskyvning:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$

- Kapasitans:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi_m = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Magnetfeltet er divergensfritt (Gauss' lov):

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

- Ampères lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{\text{fri}}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Magnetiserende felt $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_r \mu_0}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Magnetisering = magnetisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta V}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faraday (–Henry)s lov:

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

- Ampère–Maxwells lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi_m}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2} \quad , \quad M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1} \quad , \quad M_{12} = M_{21} = M$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Divergens og curl til en vektor i kartesiske koordinater

- Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- Curl:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \hat{x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$