NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

EKSAMEN TFY4150/TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
HALVÅRSPRØVE FY1303 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
Fredag 6. august 2004 kl. 0900 - 1400
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Side 2 - 6: Oppgave 1 - 5.
Vedlegg 1 - 3: Formelsamling.

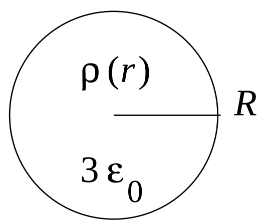
Prøven består av 5 oppgaver. Det er angitt i forbindelse med hver enkelt oppgave hvor mye den teller under bedømmelsen. Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer i oppgaveteksten. Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er luft (vakuum), med permittivitet $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Sensuren kan ventes ca 15. august.

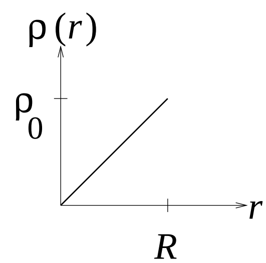
OPPGAVE 1 (Deloppgave a teller 10%, b teller 15%.)

a) Hva er den elektriske feltstyrken inne i en elektrisk leder (metall) i elektrostatisk likevekt, og hvorfor? Hvor vil en eventuell netto ladning plassere seg på en elektrisk leder i elektrostatisk likevekt?

b) I resten av oppgaven ser vi på ei kule med radius R som er laget av et dielektrisk materiale med relativ permittivitet $\varepsilon_r = 3$. Kula inneholder positive ioner slik at netto (fri) ladning pr volumenhet inne i kula er $\rho(r) = \rho_0 r/R$ (der ρ_0 er en konstant), dvs ladningstettheten øker lineært med avstanden fra kulas sentrum (se figuren til høyre).



dielektrisk kule
($\varepsilon_r = 3$)



Bruk Gauss' lov til å bestemme det elektriske feltet $E(r)$ som funksjon av avstanden r fra kulas sentrum. (Feltet skal bestemmes både inne i kula ($r < R$) og utenfor kula ($r > R$).)
Skisser $E(r)$ mellom $r = 0$ og $r = 2R$.

Oppgitt:

$$dQ = \rho\, dV = \rho(r) \cdot 4\pi r^2\, dr \qquad \text{(kulesymmetri)}$$

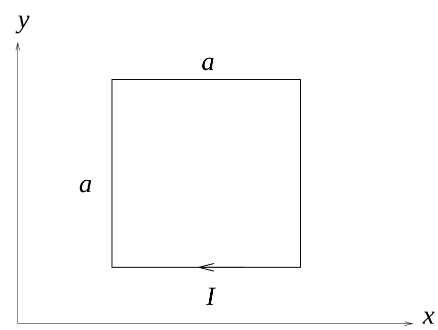
OPPGAVE 2 (Deloppgave a og b teller 5% hver, c teller 10%.)

a) Bruk Amperes lov til å vise at magnetfeltet i avstand s fra en tynn, uendelig lang rett strømførende leder (strømstyrke I) er

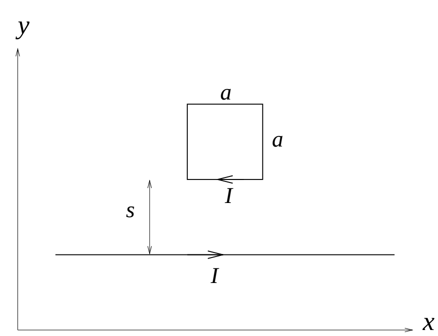
$$B(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Begrunn valget av integrasjonsvei ("amperekurve").

b) En lukket strømsløyfe er formet som et kvadrat med sidekanter a og ligger i xy-planet, som vist i figuren nedenfor. Hva blir strømsløyfas magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}$ når strømstyrken er I (med klokka). Angi både størrelse og retning på $\boldsymbol{m}$.

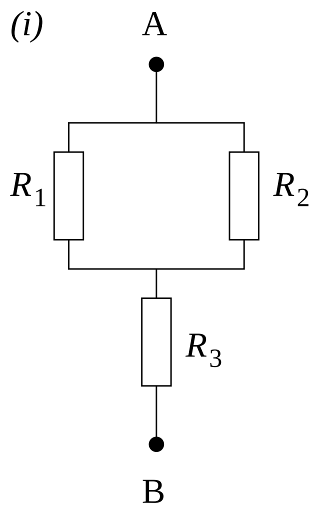


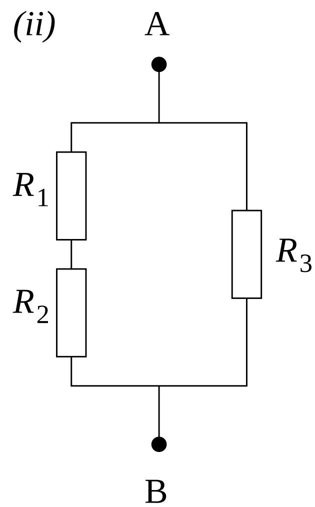
c) De to strømførende lederne fra a) og b) ligger i samme plan (xy-planet) og fører begge en strøm I, se figuren nedenfor. Hvor stor kraft $\boldsymbol{F}$ virker på den kvadratiske sløyfa? (Angi både størrelse og retning.)



OPPGAVE 3 (Teller 15%)

Figuren nedenfor viser to ulike kombinasjoner, (i) og (ii), av resistanser. I begge tilfeller er den totale resistansen mellom A og B lik R_1. Hva må da R_3 være i de to tilfellene, uttrykt ved R_1 og R_2 (som altså antas å være kjent)? Bestem tallverdier for R_3 når $R_1 = 1\ \Omega$ og $R_2 = 4\ \Omega$. Med disse tallverdiene, hva blir strømmen gjennom resistansen R_3 i de to tilfellene dersom A og B kobles til en likespenningskilde på 6 V?



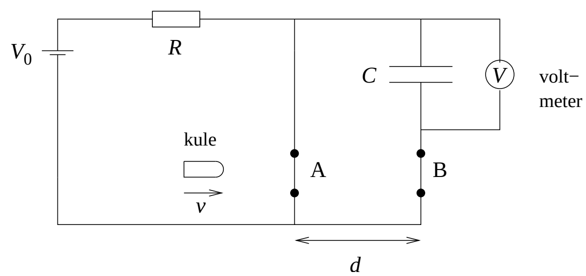


OPPGAVE 4 (Teller 15%)

Kretsen på figuren skal brukes til å måle farten v på ei kule. Før skuddet avfyres går det en konstant strøm i kretsen. Spenningskilden er $V_0 = 6.0$ V, motstanden $R = 130\ \Omega$ og kapasitansen $C = 6.2\ \mu$F. Avstanden d er 25 cm. Kula bryter kretsen i punktet A ved $t = 0$, deretter i punktet B. Nå viser voltmeteret V at vi har en potensialforskjell på 1.0 V mellom kondensatorplatene. Vis at spenningen over voltmeteret er gitt ved

$$V(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

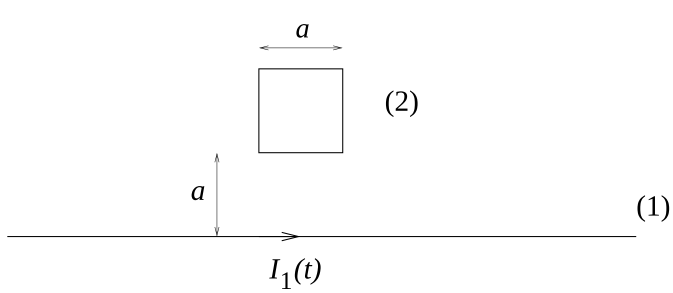
og bestem derved størrelsen τ. Hvor stor var kulas fart v?



(Et voltmeter måler rett og slett potensialforskjellen mellom to punkter i en krets uten å påvirke kretsen. Det går for eksempel ingen strøm gjennom et ideelt voltmeter.)

OPPGAVE 5 (Deloppgave a teller 5%, mens b og c teller 10% hver.)

a) En uendelig lang, rett leder (1) og ei kvadratisk ledersløyfe (2) med sidekanter a er plassert som vist i figuren nedenfor. Bestem den gjensidige induktansen $M_{21} = \phi_2/I_1$ mellom den lange rette lederen og den kvadratiske ledersløyfa. (Tips: Anta at den rette lederen fører en strøm I_1 og benytt resultatet i oppgave 2a til å bestemme den magnetiske fluksen ϕ_2.)



Oppgitt: $\int \frac{dx}{x} = \ln x$

b) Strømmen i den lange rette lederen skrus av på følgende vis:

$$I_1(t) = I_0 e^{-\alpha t} \quad ; \quad t > 0$$

($I_1(t) = I_0$ for $t \leq 0$.) Hvilken vei går den induserte strømmen

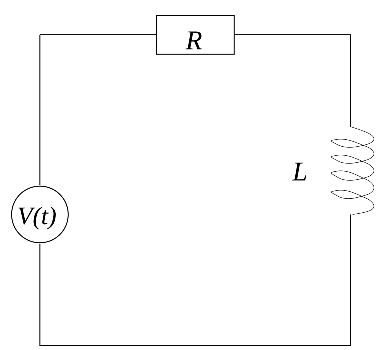
$$I_2(t) = I_s e^{-\alpha t}$$

i den kvadratiske sløyfa? Bestem I_s når total resistans i den kvadratiske sløyfa er R. (Vi neglisjerer den kvadratiske sløyfas selvinduktans i denne deloppgaven. Dersom du ikke har bestemt M_{21} i punkt a, kan du uttrykke I_s ved M_{21}.)

c) Dersom selvinduktansen L til den kvadratiske sløyfa *ikke* kan neglisjeres, kan vi betrakte sløyfa som en seriekobling av en motstand R og en induktans L, tilsluttet en spenningskilde

$$V(t) = V_0 e^{-\alpha t} \quad ; \quad t > 0$$

($V(t) = 0$ for $t \leq 0$.) Vi antar altså at V_0 er en kjent størrelse i denne deloppgaven (i tillegg til R, L og α, selvsagt).



Gi en begrunnelse for at strømmen $I(t)$ i denne kretsen må være kontinuerlig i $t = 0$, dvs

$$I(t \to 0^+) = 0$$

Strømmen $I(t)$ blir på formen

$$I(t) = I_\alpha e^{-\alpha t} + I_\beta e^{-\beta t} \qquad (\alpha \neq \beta)$$

der det siste leddet nettopp skyldes at $L \neq 0$. Bruk Kirchhoffs spenningsregel og startbetingelsen $I(0) = 0$ til å fastlegge størrelsene I_α, I_β og β (som alle kan forutsettes å være forskjellig fra null).

Formelsamling

$\int d\boldsymbol{A}$ angir flateintegral og $\int d\boldsymbol{l}$ angir linjeintegral. $\oint$ angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

Elektrostatikk

- Coulombs lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

- Elektrisk felt og potensial:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

- Elektrisk potensial fra punktladning:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Elektrisk fluks:

$$\phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss lov for elektrisk felt:

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\mathrm{fri}}$$

- Elektrostatisk felt er konservativt:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

- Elektrisk forskyvning:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$

- Kapasitans:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi_m = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss' lov for magnetfeltet:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

- Ampères lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- $\boldsymbol{H}$-feltet:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_r \mu_0}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Magnetisering = magnetisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta V}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder (uniformt magnetfelt):

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

- Magnetisk kraft på strømførende leder (generelt):

$$\boldsymbol{F} = I \int d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faraday (–Henry)s lov:

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

- Ampère–Maxwells lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi_m}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2} \quad , \quad M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1} \quad , \quad M_{12} = M_{21} = M$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$