NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

EKSAMEN TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
HALVÅRSPRØVE FY1303 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
Torsdag 13. mai 2004 kl. 0900 - 1400
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Side 2 - 6: Oppgave 1 - 5.
Vedlegg 1 - 3: Formelsamling.

Prøven består av 5 oppgaver. Det er angitt i forbindelse med hver enkelt oppgave hvor mye den teller under bedømmelsen. Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer i oppgaveteksten. Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er luft (vakuum), med permittivitet $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Sensuren kan ventes ca 3. juni.

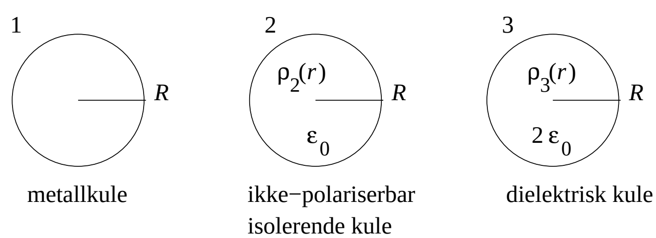
OPPGAVE 1 (Teller 20%)

Du har tre kuler med like stor radius R og like stor nettoladning Q. Kulene har stor innbyrdes avstand og vekselvirker derfor ikke med hverandre. Kule 1 er ei metallkule. Kule 2 er ei ikke-polariserbar isolerende kule (dvs permittivitet ε_0) med ladningstetthet $\rho_2(r)$ som varierer med avstanden r fra kulas sentrum på følgende måte:

$$\rho_2(r) = \rho_{20}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \qquad (r < R)$$

Kule 3 er ei dielektrisk kule med relativ permittivitet $\varepsilon_r = 2$, og med ladningstetthet $\rho_3(r)$ som er konstant over hele kulas volum:

$$\rho_3(r) = \rho_{30} \qquad (r < R)$$



Vis at

$$\rho_{20} = \frac{3Q}{\pi R^3}$$

Bestem også ρ_{30}. Bruk deretter Gauss' lov til å bestemme det elektriske feltet som funksjon av avstanden r fra kulas sentrum, dvs henholdsvis $E_1(r)$ for kule 1, $E_2(r)$ for kule 2 og $E_3(r)$ for kule 3. Alle tre feltene skal bestemmes både inni kula ($r < R$) og utenfor kula ($r > R$).
I hvilken avstand, henholdsvis r_1, r_2 og r_3, har feltet fra de tre kulene sin maksimale verdi? Bestem de tilhørende maksimale feltverdiene. Skisser $E_1(r)$, $E_2(r)$ og $E_3(r)$ mellom $r = 0$ og $r = 2R$.

Oppgitt:

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$

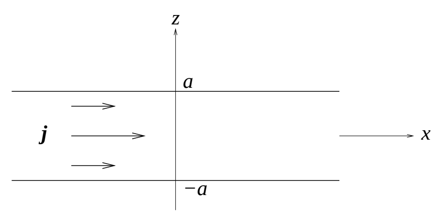
$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{fri}}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

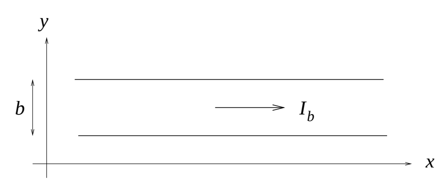
OPPGAVE 2 (Hver deloppgave a og b teller 10% hver)

Ei plate med tykkelse $2a$ og tilnærmet uendelig utstrekning i både x- og y-retning er plassert mellom $z = -a$ og $z = a$. Plata fører en strøm i positiv x-retning. Strømtettheten (dvs strøm pr flateenhet) er

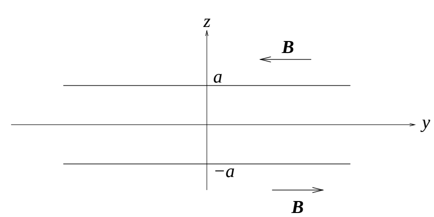
$$\boldsymbol{j}(z) = j_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \hat{x}$$



a) Bestem total strøm I_b som går på en bredde b av plata (dvs: en bredde b i y-retning, se figuren nedenfor).



Magnetfeltet $\boldsymbol{B}(z)$ som skyldes strømmen i plata peker i positiv y-retning hvis $z < 0$ og i negativ y-retning hvis $z > 0$. Forklar hvorfor. (Tegn gjerne en figur.)



b) Magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ er like stort i absoluttverdi men motsatt rettet i en avstand z henholdsvis over og under xy-planet. Vi kan med andre ord skrive $\boldsymbol{B}(z) = B(z)\ \hat{y}$, med $B(z) > 0$ for $z < 0$, $B(z) < 0$ for $z > 0$, og $|B(z)| = |B(-z)|$. Bruk Amperes lov til å finne $B(z)$, både inni og utenfor den strømførende plata. Tegn figur(er) som viser hvordan du har valgt integrasjonskurver (amperekurver). Skisser $B(z)$ mellom $z = -2a$ og $z = 2a$.

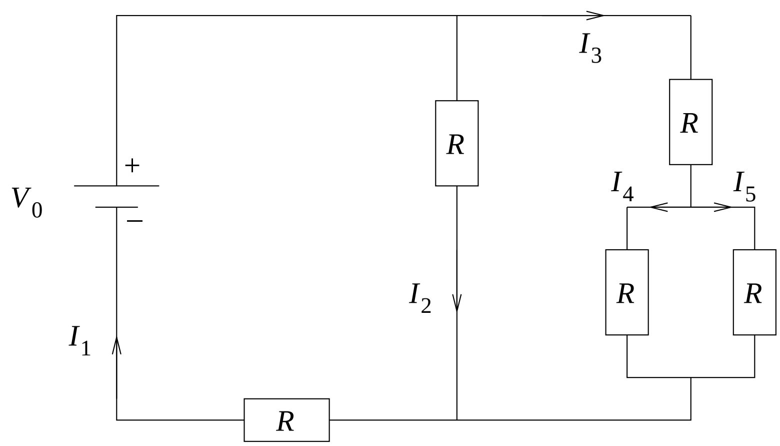
Oppgitt:

$$I = \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

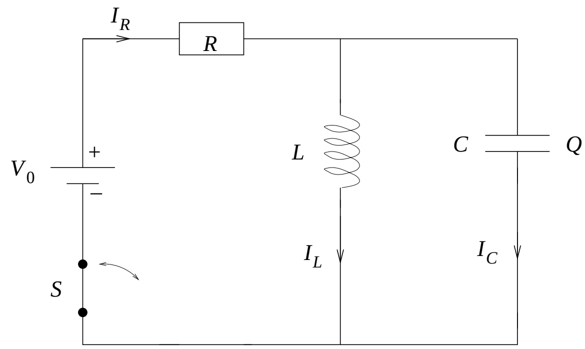
OPPGAVE 3 (Teller 15%)

Bestem de ulike strømstyrkene I_j $(j = 1, .., 5)$ angitt i kretsen nedenfor. Likespenningskilden er $V_0 = 8$ V, og de fem motstandene er like store, $R = 1\ \Omega$.



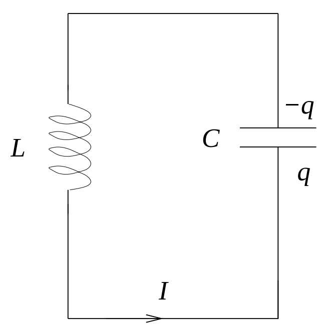
OPPGAVE 4 (Hver deloppgave a, b og c teller 10% hver)

Kretsen nedenfor består av en likespenningskilde V_0 koblet til en motstand R, en kondensator med kapasitans C og en induktans L. C og L er koblet i parallell. En bryter S kan åpnes og lukkes slik at V_0 blir koblet henholdsvis fra og til.



a) Anta først at bryteren S har vært lukket i lang tid slik at V_0 har vært tilkoblet så lenge at vi har *stasjonære* forhold i kretsen (dvs tidsuavhengige strømstyrker). Bestem strømmene I_R, I_L og I_C som angitt i figuren over. Bestem også ladningen Q på kondensatoren.

b) Bryteren S åpnes ved et tidspunkt $t = 0$ slik at kretsen deretter bare består av kondensatoren og induktansen:



Vis at ladningen $q(t)$ på kondensatoren nå beskrives av ligningen

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$

og bestem ω. Ligningen for q har generell løsning

$$q(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

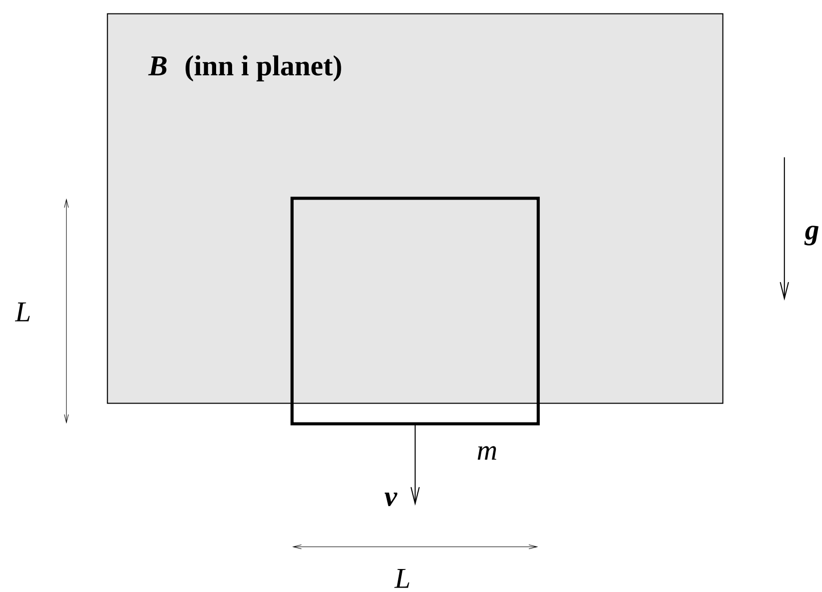
Bruk startbetingelsene for q og I (dvs ved $t = 0$) til å fastlegge de to koeffisientene A og B.

c) Energien som er lagret i en kapasitans C med ladning q er $U_C = q^2/2C$, mens energien som er lagret i en induktans L med strøm I er $U_L = LI^2/2$. Hva er da den totale energien $U = U_C + U_L$ lagret i denne LC-kretsen? Hva skjer med denne energien i en *reell* LC-krets, hvor spoletråd i induktansen og ledninger i kretsen forøvrig er laget av et metall som f.eks. kobber?

Oppgitt:
Spenningsfall over induktans: $L\, dI/dt$.

OPPGAVE 5 (Teller 15%)

Ei kvadratisk ledersløyfe med masse m og sidekanter L faller med konstant hastighet $\boldsymbol{v}$ i tyngdefeltet. Nederste horisontale del av sløyfa er under hele eksperimentet utenfor området med uniformt magnetfelt B. Øverste del av sløyfa er under hele eksperimentet inne i det uniforme magnetfeltet. (Skravert område i figuren.) Magnetfeltet står normalt på tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$, og dessuten normalt på den fallende ledersløyfa. (Se figuren nedenfor, der $\boldsymbol{B}$ er rettet inn i planet.)



Bestem retningen på den induserte elektromotoriske spenningen, og dermed retningen på strømmen I, i ledersløyfa. (Med eller mot klokka.) Finn et uttrykk for strømmen I i sløyfa når den faller med konstant hastighet.

Ledersløyfa, som har fast kvadratisk form, er laget av en sølvtråd med like stor tykkelse hele veien rundt. Styrken på magnetfeltet er $B = 1$ T. Bruk dette til å bestemme *tallverdi* på den konstante fallhastigheten v.

Oppgitt:
Tyngdens akselerasjon: $g = 9.8$ m/s^2
Massetetthet for sølv: $\rho = 10.5 \cdot 10^3$ kg/m^3
Elektrisk konduktivitet for sølv: $\sigma = 6.3 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}$ m^{-1}
Ohms lov: $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{j}$ = strømtetthet, $\boldsymbol{E}$ = elektrisk felt)

Formelsamling

$\int d\boldsymbol{A}$ angir flateintegral og $\int d\boldsymbol{l}$ angir linjeintegral. $\oint$ angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

Elektrostatikk

- Coulombs lov:
$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

- Elektrisk felt og potensial:
$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$
$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

- Elektrisk potensial fra punktladning:
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Elektrisk fluks:
$$\phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss lov for elektrisk felt:
$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$
$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{fri}}$$

- Elektrostatisk felt er konservativt:
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

- Elektrisk forskyvning:
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

- Elektrisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$

- Kapasitans:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi_m = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Gauss' lov for magnetfeltet:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

- Ampères lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- $\boldsymbol{H}$-feltet:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_r \mu_0}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Magnetisering = magnetisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta V}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faraday (–Henry)s lov:

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

- Ampère–Maxwells lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi_m}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2} \quad , \quad M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1} \quad , \quad M_{12} = M_{21} = M$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$