Eksamen i fag 74233
Elektrisitet og magnetisme,
22/5-97.

①

Forslag til løsning.

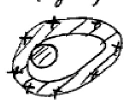
Oppgave 1

a)

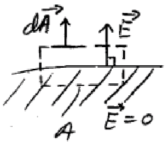
I likevekt kan det ikke være noe elektrisk felt i ledere, dvs. $\vec{E}=0$ (ellers vil det gå strøm). Danner så et lukket volum inne i lederen og benytter Gauss lov ved å integrere over overflaten til dette volumet. Med $\vec{E}=0$ gir dette

$$Q = \varepsilon_0 \oint \vec{E}\,d\vec{A} = 0$$

Dvs. nettoladningen $Q=0$ innenfor et slikt volum. Følgelig må all nettoladning være plassert på overflaten.



Når en ladet metallkule berører innsiden av et lukket metallkulrom vil hele ladningen overføres til ytterflaten av systemet da det ikke kan være nettoladning på innerflaten i likevekt (da $\vec{E}=0$ også i hulrommet).



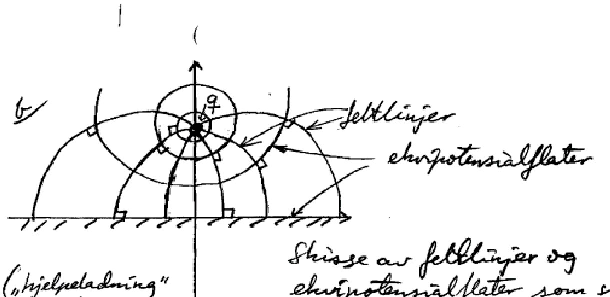
For å finne sammenhengen mellom $\vec{E}$ og σ langs en metalloverflate kan en benytte Gauss lov. Ved å integrere over overflaten til det skisserte volumet finner en

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\,d\vec{A} = \varepsilon_0 E A = Q = \sigma A$$

$$\underline{\underline{\sigma = \varepsilon_0 E}}$$

②

b)



Skisse av feltlinjer og ekvipotensialflater som står vinkelrett på hverandre.

c) Det elektriske feltet er gitt ved $\vec{E} = -\nabla V$. For å finne overflateladningen trenger vi bare $\vec{E}$ for $z=0$ der bare z-komponenten E_z er forskjellig fra 0.

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z-a}{(\rho^2+(z-a)^2)^{3/2}} - \frac{z+a}{(\rho^2+(z-a)^2)^{3/2}}\right]$$

$$\xrightarrow[z\to 0]{} -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$$

Overflateladningen blir følgelig

$$\underline{\underline{\sigma = \varepsilon_0 E_z = -\frac{q}{2\pi}\frac{a}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}}}$$

③

Oppgave 2.

a) Sammenhengen mellom overflateladning σ og elektrisk felt $\vec{E}$ blir som i oppgave 1 slik at

$$\sigma = \varepsilon_0 E$$

Nå er videre $\sigma = Q/A$ og $E = V/d$ der V er spenningen mellom platene slik at en finner

$$\frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \frac{V}{d}$$

og kapasitansen blir

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \underline{\underline{\varepsilon_0 \frac{A}{d}}}$$

Med konstant relativ permittivitet ε_r blir kapasitansen

$$C = \varepsilon_r C_0 = \underline{\underline{\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}}}$$

Numerisk

$$C = 5{,}6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\;\frac{1{,}2\cdot 10^{-2}\,\text{m}^2}{3\cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 198\cdot 10^{-12}\,\text{As/V} \approx \underline{\underline{200\,\text{pF}}}$$

b) Med dielektrisk medium vil overflateladning $\sigma = \varepsilon_0 E$ erstattes med

$$D = \sigma = Q/A$$

Dette er også verdien til D mellom platene, dvs

$$D_z = D = D(z) = \underline{Q/A} \;(= \text{konst})$$

da det ikke finnes fri romladning mellom platene. Det elektriske feltet følger nå fra $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$

$$E_z = E = E(z) = \frac{1}{\varepsilon_r\varepsilon_0} D = \underline{\underline{\frac{1}{a+bz}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}} \qquad \left(\sigma = \frac{Q}{A}\right)$$

④

Polariseringen blir følgelig

$$P_z = P = P(z) = D - \varepsilon_0 E = \underline{\underline{\sigma\left(1 - \frac{1}{a+bz}\right)}}$$

Potensialforskjellen (spenningen) mellom platene finnes nå ved å integrere det elektriske feltet

$$V = -\int \vec{E}\,d\vec{s} = -\int_d^0 E_z\,dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^d \frac{dz}{a+bz} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\Big|_0^d \frac{1}{b}\ln(a+bz)$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{b}\left(\ln(a+bd) - \ln a\right) = \underline{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 b}\ln\left(1+\frac{b}{a}d\right)}$$

Kapasitansen blir

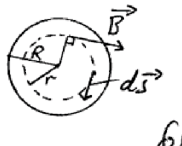
$$C_V = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 b}\ln\left(1+\frac{b}{a}d\right)} = \underline{\underline{\varepsilon_0 \frac{bA}{\ln\left(1+\frac{b}{a}d\right)}}}$$

Fri romladningstetthet er gitt ved $\rho = \nabla\vec{D}$ og samlet (netto) er gitt ved $\rho_t = \varepsilon_0 \nabla\vec{E}$. Følgelig er bunden romladningstetthet gitt ved

$$\rho_b = \rho_b(z) = \rho_t - \rho = \varepsilon_0 \nabla\vec{E} - \nabla\vec{D} = -\nabla\vec{P} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = \underline{\underline{\sigma\frac{b}{(a+bz)^2}}}$$

5

Oppgave 3

a) 

Benytter her Ampères lov og legger integrasjonskurven i en avstand r fra sentrum. Dette gir

$$\oint \vec{H}\,d\vec{s} = H\cdot 2\pi r = I = I(r)$$

$$H = \frac{I(r)}{2\pi r}$$

der $I(r)$ er strømmen innenfor radien r. Med jamn fordeling over ledertverrsnittet blir da

$$I(r) = \begin{cases} I\left(\frac{r}{R}\right)^2 & \text{for } r<R \\ I & \text{for } r>R \end{cases}$$

Med $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ blir følgelig

$$\underline{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\, r} \qquad r<R$$

$$\underline{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \qquad r>R$$

Magnetfeltet blir tangensielt til en slik jernring. $\vec{H}$-feltet er da kontinuerlig som en også kan se direkte fra Ampères lov ovenfor. ($\oint \vec{H}\,d\vec{s} = 0$ med null overflatestrøm, dvs. tangensialkomponenten til $\vec{H}$ må være den samme på begge sider av overflaten). Følgelig har en innenfor jernringen

$$\underline{\underline{B = \mu_r \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}} \qquad (r>R)$$

6

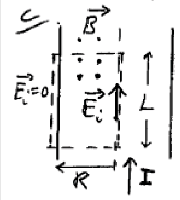
b) Motstanden til lederen er

$$R = \rho\frac{L}{A} \qquad \text{der } A = \pi R^2$$

slik at spenningen og det elektriske feltet blir

$$V = RI = \underline{\rho\frac{L}{\pi R^2} I} \quad \text{og} \quad E = \frac{V}{L} = \underline{\underline{\frac{\rho I}{\pi R^2}}}$$

Numerisk $V = 2{,}82\cdot 10^{-8}\,\frac{Vm}{A}\;\frac{400\,m}{\pi(5\cdot 10^{-3})^2 m^2}\cdot 35A = \underline{5{,}0\ V}$

c) 

Bestemmer først magnetisk fluks mellom sentrum og ytterradien R på et stykke av lederen av lengde L.

$$\phi_B = \int \vec{B}\,d\vec{A} = L\int_0^R B\,dr_1 = \frac{L\mu_0 I}{2\pi R^2}\int_0^R r_1\,dr_1 = \underline{L\frac{\mu_0 I}{4\pi}}$$

Indusert ems

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_i\,d\vec{s} = L E_i = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$$E_i = -\frac{1}{L}\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\dot{I} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d}{dt}(I_0 \sin\omega t)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{\mu_0}{4\pi}\omega I_0 \cos\omega t}}$$