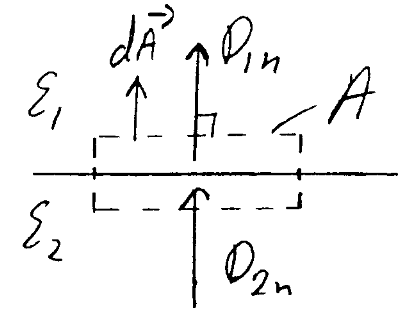
Kontinuasjonseksamen i fag 74233
Elektrisitet og magnetisme 19/8-97.

Forslag til løsning.

1

Oppgave 1.

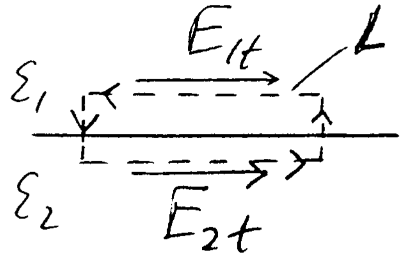
a)



Vi kan først betrakte normalkomponenten til $\vec{D}$-feltet og benytter Gauss lov og legger en Gaussflate langs overflaten som vist på figuren. Uten ladning i grenseflaten finner en da

$$\oint \vec{D}\,d\vec{A} = D_{1n}A - D_{2n}A = Q = 0$$

$$\underline{\underline{D_{1n} = D_{2n}}} \quad \left[\text{evt. } \underline{\underline{\varepsilon_1 E_{1n}}} = \underline{\underline{\varepsilon_2 E_{2n}}}\right]$$



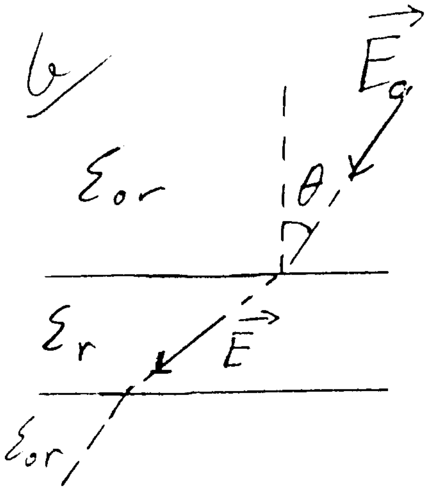
Betrakter så tangensialkomponenten til $\vec{E}$-feltet. Kan da benytte $\oint \vec{E}\,d\vec{s} = 0$ og legger integrasjonskurven langs grenseflaten som vist på figuren. [Endringen $d\Phi_B/dt$ i magnetisk fluks kan neglisjeres da arealet innenfor integrasjonskurven vil reduseres til null når kurven nærmer seg grenseflaten. I det elektrostatiske tilfellet er også $d\Phi_B/dt = 0$.]

Følgelig finner en

$$\oint \vec{E}\,d\vec{s} = -E_{1t}L + E_{2t}L = 0$$

$$\underline{\underline{E_{1t} = E_{2t}}}$$

b)



(2)

Dekomponerer feltet først i normal- og tangensial-komponenter E_{0n} og E_{0t}

$$E_{0n} = E_0 \cos\theta$$
$$E_{0t} = E_0 \sin\theta$$

Bruk at grensebetingelsene gir da $D_n = D_{0n}$ eller

$$\varepsilon_r E_n = \varepsilon_{0r} E_{0n}$$
$$E_n = \underline{\frac{\varepsilon_{0r}}{\varepsilon_r} E_0 \cos\theta}$$

og
$$E_t = E_{0t} = \underline{E_0 \sin\theta}$$

Størrelsen til E blir følgelig

$$E = \sqrt{E_n^2 + E_t^2} = \underline{\underline{E_0 \left[\left(\frac{\varepsilon_{0r}}{\varepsilon_r} \cos\theta \right)^2 + \sin^2\theta \right]^{1/2}}}$$

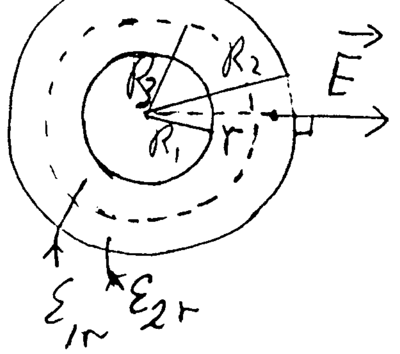
Numerisk:

$$\cancel{E = 100\ \mathrm{V/mm} \left[\left(\frac{2}{5} \cos 25^\circ \right)^2 + \sin^2 25^\circ \right]^{1/2} = 55{,}1\ \mathrm{V/mm}}$$

$$E_0 = \frac{E}{[\quad]^{1/2}} = 180\ \mathrm{V/mm}$$

Oppgave 2.

a/



På grunn symmetrien kan en her benytte Gauss lov til å bestemme det elektriske feltet. Gaussflaten blir en sylinder med radius r og lengde L

$$\oint \vec{D}\, d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint \vec{E}\, d\vec{A} = \varepsilon_0 E \cdot 2\pi r L = Q$$

$$\underline{\underline{E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\,\frac{1}{r}}}$$

(Dvs. størrelsen $A = Q/2\pi\varepsilon_0 L$. Arealet av den krumme sylinderoverflaten er $2\pi r L$. Endeflatene vil ikke bidra her da $\vec{E}$ er parallell disse.)

b/ For å bestemme kapasitansen må potensial-forskjellen mellom de 2 sylinderflatene beregnes. Med $\vec{E} = -\nabla V$ eller $dV = -E_r\, dr = -E\, dr$ finner en

$$V = -\int_{R_2}^{R_1} E\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{A}{r}\, dr = \Big|_{R_1}^{R_2} A \ln r = \underline{A \ln(R_2/R_1)}$$

Kapasitansen blir følgelig:

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln(R_2/R_1)} = \underline{\underline{\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}}}$$

c) Med dielektrisk medium mellom de 2 sylinderflatene kan den resulterende kapasitansen betraktes som en seriekobling av 2 kapasitanser C_1 og C_2. Da gjelder ($Q = Q_1 = Q_2$, $V = V_1 + V_2$)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2}$$

Med grenseflate ved $r = R_3$ har en da

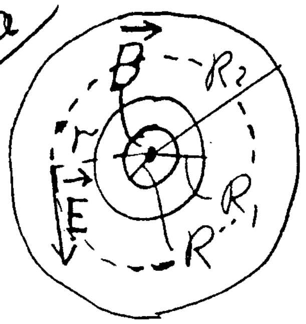
$$C_1 = 2\pi \varepsilon_0 L \frac{\varepsilon_{1r}}{\ln(R_3/R_1)}$$

$$C_2 = 2\pi \varepsilon_0 L \frac{\varepsilon_{2r}}{\ln(R_2/R_3)}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \underline{\underline{2\pi \varepsilon_0 L \frac{\varepsilon_{1r}\, \varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r} \ln(R_2/R_3) + \varepsilon_{2r} \ln(R_3/R_1)}}}$$

Oppgave 3

a/



Det induserte elektriske feltet er bestemt av induksjonsloven (oppgitt under oppgave 1)

$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

der Φ_B er magnetisk fluks innenfor integrasjons-sløyfen som i vårt tilfelle velges som en sirkel med radius r. Den magnetiske fluksen er da

$$\Phi_B = \int \vec{B}\, d\vec{A} = B \cdot A = \pi R^2 B_0 \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\, \omega t$$

der $A = \pi R^2$ er arealet innenfor solenoiden. Vi finner

$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = 2\pi r E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\omega \pi R^2 B_0 \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\, \omega t$$

$$\underline{\underline{E = -\frac{\omega R^2 B_0}{2r} \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\, \omega t}}$$

(Dvs. størrelsen $K = \frac{1}{2} \omega R^2 B_0 \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\, \omega t$.)

b/ For en sirkelformet strømsløyfe som fører en strøm dI blir magnetfeltet i sentrum

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} dI \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dI}{r^2} \oint ds = \underline{\frac{\mu_0 dI}{2r}}$$

Strømtettheten i ringen er nå gitt ved

$$J = \sigma E = \sigma K / r$$

Den elektriske strømmen i en smal ring av bredde dr blir så

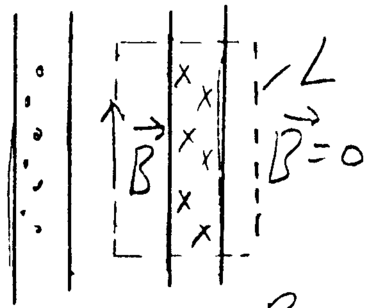
$$dI = J\,dA = J\,d\,dr = \frac{\sigma K d}{r}\,dr$$

Det genererte magnetfeltet blir følgelig

$$B_s = \int dB = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \sigma}{2r}\frac{Kd}{r}\,dr = \frac{\mu_0 \sigma K d}{2}\Big|_{R_1}^{R_2}\left(-\frac{1}{r}\right)$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\mu_0 \sigma K d\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}}$$

c) Med d stor kan ~~en~~ en benytte Ampères lov.



Strømmen innenfor integrasjons-sløyfen er gitt ved

$$I = \int J\,dA = \int_0^L\int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma K}{r}\,dr\,dL =$$

$$= \sigma K L \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \underline{\sigma K L \ln(R_2/R_1)}$$

Ampères lov

$$\oint \vec{B}\,d\vec{s} = LB = \mu_0 I = \mu_0 \sigma K L \ln(R_2/R_1)$$

$$B = \underline{\underline{\mu_0 \sigma K \ln(R_2/R_1)}}$$