NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Tirsdag 31. mai 2005 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 5 oppgaver, i alt 10 deloppgaver som alle telte like mye under bedømmelsen.
Løsningsforslaget er på 8 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

a) Likt spenningsfall V over begge kapasitansene medfører at

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = V$$

Total ladning på de to kapasitansene er

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2)V$$

Dermed:

$$C = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2$$

Også likt spenningsfall V over de to motstandene. Dermed:

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 = V$$

ifølge Ohms lov. Total strøm gjennom de to motstandene er

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \frac{V}{R}$$

Dermed:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

b) En parallellplatekondensator med plater med areal S i innbyrdes avstand d har kapasitans $\varepsilon_0 S/d$ dersom rommet mellom platene er fylt med luft (vakuum). Dersom rommet mellom platene er fylt med et dielektrikum med relativ permittivitet ε_r, blir kapasitansen $\varepsilon_r \varepsilon_0 S/d$. Her har vi en delvis fylt parallellplatekondensator som kan betraktes som en *parallellkobling* av en luftfylt kondensator med plateareal $A/3$ og plateavstand d og en fylt med polystyren, med relativ permittivitet $\varepsilon_r = 2.5$, plateareal $2A/3$ og plateavstand d. Vi bruker resultatet i a samt oppgitte tallverdier for A og d og finner

$$\begin{aligned} C &= \frac{\varepsilon_0 A}{3d} + \frac{2.5\varepsilon_0 \cdot 2A}{3d} \\ &= \frac{2\varepsilon_0 A}{d} \\ &= \frac{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} \\ &= 17.7 \cdot 10^{-12} \end{aligned}$$

Her har vi brukt bare SI-enheter, så dette må være antall F (farad). Altså: $C = 17.7$ pF.

Kommentar: Hvis en ikke husker uttrykkene for kapasitansen til parallellplatekondensator fylt med luft eller dielektrikum: Start med uendelig stort ladet plan med ladning Q/S pr flateenhet. Bruk av Gauss' lov gir konstant elektrisk feltstyrke $E = Q/2\varepsilon_0 S$. To uendelig store ladete plan med motsatt ladning har derfor $E = Q/\varepsilon_0 S$ mellom platene og $E = 0$ utenfor. Sammenhengen mellom E og potensialforskjellen V mellom platene er $V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = E \cdot d = Qd/\varepsilon_0 S$, slik at kapasitansen er $C = Q/V = \varepsilon_0 S/d$.

Med dielektrikum mellom platene gjør vi helt tilsvarende, men med den elektriske forskyvningen $\boldsymbol{D}$ i stedet for $\boldsymbol{E}$. Med Gauss' lov for $\boldsymbol{D}$ finner vi $D = Q/S$ mellom platene, som gir $E = D/\varepsilon_r\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_r\varepsilon_0 S$ mellom platene. Dermed $C = \varepsilon_r\varepsilon_0 S/d$.

c) Potensialforskjellen mellom platene er Q/C når platene har ladning $\pm Q$. Hvis polystyrenet har motstand R, får vi dermed en strøm $I = V/R = Q/RC$, ifølge Ohms lov. (Vakuumlaget har uendelig motstand, så total motstand for parallellkoblingen av vakuumlaget og polystyrenlaget blir lik motstanden til polystyrenlaget.) Retningen på strømmen blir fra den positive til den negative plata. Vi kan derfor skrive $I = -dQ/dt$, som innsatt for I gir en første ordens homogen differensialligning for Q:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0$$

med løsning

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

Når 99% av den opprinnelige ladningen Q_0 har lekket mellom platene, står vi igjen med $0.01Q_0$. Dette tar en tid t_1 bestemt ved

$$\begin{aligned} 0.01Q_0 &= Q_0 e^{-t_1/RC} \\ \Rightarrow \ln 0.01 &= -\frac{t_1}{RC} \\ \Rightarrow t_1 &= RC \ln 100 = 2RC \ln 10 \end{aligned}$$

Det gjenstår å bestemme motstanden R. I forelesningene har vi vist at et stykke materiale med lengde l, tverrsnitt med areal S og elektrisk ledningsevne σ er $R = l/\sigma S$. Dette kan også utledes kjapt ved hjelp av de oppgitte formlene: $I = jS = \sigma ES = \sigma(V/l)S$, dvs $V/I = R = l/\sigma S$. Her er $l = d$ og $S = 2A/3$ slik at $R = 3d/2\sigma A$. Vi fant i *b* at $C = 2\varepsilon_0 A/d$, slik at

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 \cdot \frac{3d}{2\sigma A} \cdot \frac{2\varepsilon_0 A}{d} \cdot \ln 10 \\ &= \frac{6\varepsilon_0}{\sigma} \cdot \ln 10 \\ &= \frac{6 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{10^{-15}} \cdot \ln 10 \\ &\simeq 122267 \end{aligned}$$

dvs sekunder. Deler vi dette med 3600, finner vi ca 34 timer. Legg merke til at utladningshastigheten ikke avhenger av platearealet A eller plateavstanden d, men bare av hva slags materiale vi har mellom platene, dvs dets relative permittivitet og elektriske ledningsevne. (Samt *andelen* polystyren i forhold til vakuum.)

OPPGAVE 2

Magnetfeltet inne i en uendelig lang luftfylt spole med tette viklinger (n viklinger pr lengdeenhet) er $B = \mu_0 nI$, der I er strømmen i spoletråden. Dette har vi utledet i forelesningene ved hjelp av Amperes lov. Fyller vi spolen med et magnetiserbart materiale, får vi i tillegg bidrag fra indusert magnetiseringsstrøm i overflaten på det magnetiserbare materialet. Vi kan da først beregne H inne i spolen ved hjelp av Amperes lov for H. Vi finner da $H = nI$ inne i spolen, slik at $B = \mu_0\mu_r H = \mu_0\mu_r nI$. Med oppgitte verdier ($n = N/l = 800/0.5$):

$$\begin{aligned} B &= \mu_0\mu_r nI \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot \frac{800}{0.5} \cdot 1 \\ &= 2^8\pi \cdot 10^{-3} \\ &\simeq 0.8 \text{ T} \end{aligned}$$

Spolens selvinduktans er pr definisjon lik forholdet mellom total omsluttet magnetisk fluks (samtlige N viklinger) og strømmen i spoletråden:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\phi}{I} \\ &= \frac{NBA}{I} \\ &= \mu_0\mu_r \frac{N^2}{l}\pi r_0^2 \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot \frac{800^2}{0.5} \cdot \pi \cdot 10^{-4} \\ &= 2^{11}\pi^2 \cdot 10^{-5} \\ &\simeq 0.2 \text{ H} \end{aligned}$$

OPPGAVE 3

a) Like mye negativ ladning mellom $-L$ og 0 som positiv ladning mellom 0 og L, og dermed total ladning $Q = 0$.
Alternativt, ved å integrere opp ladningen pr lengdeenhet:

$$\begin{aligned} Q &= \int dq \\ &= \int_{-L}^{L} \lambda(x)\, dx \\ &= \frac{\lambda_0}{L}\int_{-L}^{L} x\, dx \\ &= \frac{\lambda_0}{L}\left[\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{2}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Staven kan deles opp i par av små lengder dx i posisjon $\pm x$, med ladning $\pm dq = \pm\lambda_0 x\, dx/L$, som bidrar med dipolmoment $d\boldsymbol{p} = (2x\,\lambda_0 x\, dx/L)\,\hat{x}$. Hele stavens dipolmoment er dermed

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \int d\boldsymbol{p} \\ &= \frac{2\lambda_0}{L}\hat{x}\int_0^L x^2\, dx \\ &= \frac{2\lambda_0}{L}\hat{x}\frac{L^3}{3} \\ &= \frac{2\lambda_0 L^2}{3}\,\hat{x} \end{aligned}$$

Vi ser at svaret stemmer dimensjonsmessig, i og med at λ_0 er en ladning pr lengdeenhet slik at $\lambda_0 L^2$ har dimensjon ladning ganger lengde, slik som dipolmomentet skal ha. Det virker også ganske fornuftig med faktoren 2/3: Hver halvdel av staven har total ladning $\pm\lambda_0 L/2$. Hvis denne var samlet i posisjon $\pm L/2$, ville dipolmomentet ha blitt $\lambda_0 L^2/2$, men ettersom det er størst ladningstetthet lengst ut på staven, må dipolmomentet være noe større enn dette.

b) Coulombpotensialet, dvs potensialet fra en punktladning, er gitt i oppgaven. Potensialet fra en infinitesimal ladning dq blir tilsvarende

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

i avstand r fra ladningen. Her skal vi bestemme potensialet i posisjon $x > L$ på x-aksen. Bidraget fra en liten ladning $dq = \lambda_0 x'\,dx'/L$ i posisjon x' blir

$$dV = \frac{\lambda_0 x'\,dx'}{4\pi\varepsilon_0 L(x-x')}$$

Totalt potensial i x finnes ved å summere opp bidragene fra alle slike ladningselementer på staven, dvs vi må integrere:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int dV \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_{-L}^{L}\frac{x'\,dx'}{x-x'} \end{aligned}$$

Dette integralet løser vi ved å substituere $u = x' - x$, slik at $dx' = du$ og $x' = u + x$:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L}\frac{x'\,dx'}{x-x'} &= \int_{-x-L}^{-x+L}\frac{(u+x)du}{(-u)} \\ &= \int_{-x+L}^{-x-L}\left(1+\frac{x}{u}\right)du \\ &= (-x-L)-(-x+L)+x\ln|-x-L|-x\ln|-x+L| \\ &= -2L + x\ln\frac{x+L}{x-L} \end{aligned}$$

(Eventuelt: Ved å benytte det oppgitte integralet, med $a \to x$ og $x \to x'$.) Dermed:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[x\ln\frac{x+L}{x-L}-2L\right] \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{L}\ln\frac{1+L/x}{1-L/x}-2\right] \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-2\right] \end{aligned}$$

som er på den oppgitte formen med $\alpha = L/x$. Vi ser at

$$\beta = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}$$

c) Vi bruker den oppgitte rekkeutviklingen og finner:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 2 &= \frac{1}{\alpha}\left[\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha)\right] - 2 \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \left((-\alpha) - \frac{1}{2}(-\alpha)^2 + \frac{1}{3}(-\alpha)^3\right)\right] - 2 \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[2\alpha + \frac{2}{3}\alpha^3\right] - 2 \\
&= \frac{2}{3}\alpha^2
\end{aligned}$$

Det betyr at potensialet langt unna staven ($x \gg L$, $\alpha \ll 1$) med god tilnærmelse kan skrives slik:

$$\begin{aligned}
V(x) &\simeq \beta \cdot \frac{2}{3}\alpha^2 \\
&= \frac{2\beta L^2}{3x^2}
\end{aligned}$$

som er på den oppgitte formen med

$$\gamma = \frac{2\beta L^2}{3} = \frac{\lambda_0 L^2}{6\pi\varepsilon_0}$$

og

$$n = 2$$

Dette virker rimelig: Hvis staven hadde hatt netto ladning forskjellig fra null, måtte vi ha forventet at potensialet faller av som $1/x$ for store x, dvs med $n = 1$. Den elektriske feltstyrken $E(x) = -dV/dx$ ville da ha falt av som $1/x^2$. Men staven har *ikke* noe netto ladning, så vi må forvente at potensialet (og den elektriske feltstyrken) går raskere mot null enn dette. Vi har funnet at $V(x) \sim 1/x^2$ for store x, hvilket betyr at $E(x) \sim 1/x^3$ langt unna staven. Dette stemmer bra med hva vi har funnet i flere øvingsoppgaver med elektrisk dipol. Positive og negative ladninger på staven bidrar med motsatt fortegn til elektrisk potensial og elektrisk feltstyrke og resulterer i at begge størrelser går raskere mot null enn om systemet har netto ladning.

OPPGAVE 4

Dipolen i origo omgir seg med et tidsavhengig magnetfelt, slik at den magnetiske fluksen innenfor ledersløyfa også blir tidsavhengig. Vi må finne hvor mye magnetisk fluks som er omsluttet av ledersløyfa og deretter derivere med hensyn på t for å bestemme indusert elektromotorisk spenning.

Ettersom $\boldsymbol{B}$ bare avhenger av *avstanden* r, velger vi "kvarte ringer" med radius r og tykkelse dr som flateelementer:

$$d\boldsymbol{A} = -\frac{\pi}{2} r\, dr\, \hat{z}$$

Magnetisk fluks gjennom en slik kvartring (positiv inn i planet ved f.eks. $t = 0$) blir

$$d\phi = \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 m_0 \cos\omega t}{4\pi r^3}(-\hat{z}) \cdot \frac{\pi}{2} r\, dr\,(-\hat{z}) = \frac{\mu_0 m_0 \cos\omega t\, dr}{8r^2}$$

Total omsluttet fluks blir

$$\begin{aligned}
\phi &= \int d\phi \\
&= \frac{\mu_0 m_0 \cos\omega t}{8} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\
&= \frac{\mu_0 m_0 \cos\omega t}{8} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)
\end{aligned}$$

Indusert ems blir dermed

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 m_0 \omega}{8} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \sin\omega t$$

med amplitude

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0 &= \frac{\mu_0 m_0 \omega}{8} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\
&= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^4}{8} \cdot \left(5 - \frac{10}{3}\right) \\
&= \frac{50\pi}{6} \cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

dvs 26.2 mV.

OPPGAVE 5

a) Total elektromotorisk spenning i kretsen er

$$V_0 - L\frac{dI}{dt}$$

og dette må tilsvare spenningsfallet over kapasitansen, Q/C. Innsetting av $I = dQ/dt$, samt divisjon med L, gir da følgende ligning for Q:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = \frac{V_0}{L}$$

Innsetting av den generelle løsningen gitt i oppgaveteksten gir

$$-\omega^2 \left(a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t\right) + \frac{a_0}{LC} + \frac{1}{LC} \left(a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t\right) = \frac{V_0}{L}$$

Hvis denne likheten skal gjelde for vilkårlig $t > 0$, må vi ha

$$\begin{aligned}
a_0 &= V_0 C \\
\omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}}
\end{aligned}$$

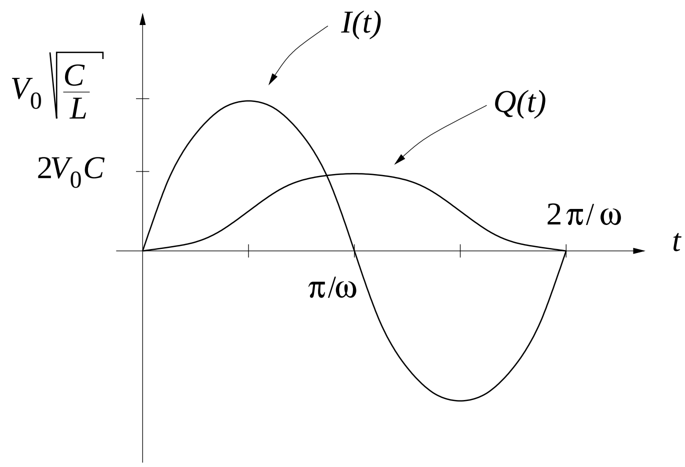
De to startbetingelsene $Q(0) = I(0) = 0$ fastlegger deretter a_1 og a_2:

$$\begin{aligned}
Q(0) = V_0 C + a_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = -V_0 C \\
I(0) = \dot{Q}(0) = \omega a_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = 0
\end{aligned}$$

b) Fullstendig løsning for ladningen Q og strømmen I er dermed

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= V_0 C(1-\cos\omega t)\\
I(t) &= \omega V_0 C \sin\omega t
\end{aligned}
$$

Skisse av en periode:



Dersom vi tar hensyn til at kretsen ikke har riktig null motstand, vil både Q og I etterhvert oscillere med mindre og mindre amplitude. Venter vi lenge nok, vil $I \to 0$ og $Q \to V_0 C$. Ved stasjonære (dvs tidsuavhengige) forhold kan det ikke lenger gå noe strøm i kretsen ettersom kondensatoren da representerer en åpen krets. Da må hele den påtrykte spenningen V_0 gjenfinnes som spenningsfall over kondensatoren, dvs $V_0 = Q/C$.