NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

LØSNINGSFORSLAG TIL KONTINUASJONSEKSAMEN I
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
Onsdag 17. august 2005 kl. 1500 - 1900

Eksamen bestod av 4 oppgaver, i alt 10 deloppgaver som alle telte like mye under bedømmelsen.
Løsningsforslaget er på 8 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

a) Lik strøm I gjennom begge motstandene. Videre er totalt spenningsfall V lik summen av spenningsfallene over hver motstand. Dermed:

$$\begin{aligned} V &= R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I = RI \\ \Rightarrow R &= R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Lik ladning $\pm Q$ på de to kapasitansene. Videre er totalt spenningsfall V lik summen av spenningsfallene over hver kapasitans. Dermed:

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{C} \\ \Rightarrow C^{-1} &= C_1^{-1} + C_2^{-1} \end{aligned}$$

b) En parallellplatekondensator med plater med areal A i innbyrdes avstand l har kapasitans $\varepsilon_0 A/l$ dersom rommet mellom platene er fylt med luft (vakuum). Dersom rommet mellom platene er fylt med et dielektrikum med relativ permittivitet ε_r, blir kapasitansen $\varepsilon_r \varepsilon_0 A/l$.
Her har vi en parallellplatekondensator som kan betraktes som en *seriekobling* av en polystyrenfylt kondensator med plateareal A og plateavstand $d_1 = d/3$ og en polypropenfylt kondensator med plateareal A og plateavstand $d_2 = 2d/3$. Polystyren har relativ permittivitet $\varepsilon_{r1} = 2.5$, polypropen har relativ permittivitet $\varepsilon_{r2} = 3.0$. Vi bruker resultatet i *a* samt oppgitte tallverdier for A og d og finner

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon_1 A}{d_1} = 2.5\varepsilon_0 \frac{A}{d/3} = \frac{15\varepsilon_0 A}{2d} \\ C_2 &= \frac{\varepsilon_2 A}{d_2} = 3.0\varepsilon_0 \frac{A}{2d/3} = \frac{9\varepsilon_0 A}{2d} \\ \Rightarrow C &= \left(\frac{2d}{15\varepsilon_0 A} + \frac{2d}{9\varepsilon_0 A}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}\left(\frac{9+15}{15\cdot 9}\right)^{-1} \\ &= \frac{45\varepsilon_0 A}{16d} = \frac{45}{16} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-3}}\ \mathrm{F} \\ &= \frac{15 \cdot 8.85 \cdot 5}{16}\ \mathrm{pF} = 41.5\ \mathrm{pF} \end{aligned}$$

Kommentar: Hvis en ikke husker uttrykkene for kapasitansen til parallellplatekondensator fylt med luft eller dielektrikum: Start med uendelig stort ladet plan med ladning Q/A pr flateenhet. Bruk av Gauss' lov gir konstant elektrisk feltstyrke $E = Q/2\varepsilon_0 A$. To uendelig store ladete plan med motsatt ladning har derfor $E = Q/\varepsilon_0 A$ mellom platene og $E = 0$ utenfor. Sammenhengen mellom E og potensialforskjellen V mellom platene er $V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = E \cdot l = Ql/\varepsilon_0 A$, slik at kapasitansen er $C = Q/V = \varepsilon_0 A/l$.
Med dielektrikum mellom platene gjør vi helt tilsvarende, men med den elektriske forskyvningen $\boldsymbol{D}$ i stedet for $\boldsymbol{E}$. Med Gauss' lov for $\boldsymbol{D}$ finner vi $D = Q/A$ mellom platene, som gir $E = D/\varepsilon_r \varepsilon_0 = Q/\varepsilon_r \varepsilon_0 A$ mellom platene. Dermed $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 A/l$.

c) Vi skal bestemme motstanden R. I forelesningene har vi vist at et stykke materiale med lengde l, tverrsnitt med areal A og elektrisk ledningsevne σ er $R = l/\sigma A$. Dette kan også utledes kjapt ved hjelp av de oppgitte formlene: $I = jA = \sigma EA = \sigma(V/l)A$, dvs $V/I = R = l/\sigma A$.

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{d_1}{\sigma_1 A} = \frac{10^{-3}}{10^{-15} \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 0.2 \cdot 10^{15}\ \Omega \\ R_2 &= \frac{d_2}{\sigma_2 A} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^{-14} \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 0.4 \cdot 10^{14}\ \Omega \\ \Rightarrow R &= R_1 + R_2 = 2.4 \cdot 10^{14}\ \Omega \end{aligned}$$

d) Vi gjenfinner påtrykt spenning $V(t)$ som spenningsfall over både R og C, ettersom disse er koblet i parallell. Strømmen gjennom R er gitt ved Ohms lov:

$$I_R(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\sigma t}\right)$$

Pr definisjon er kondensatorens kapasitans bestemt ved $C = Q/V$, slik at ladningen på kondensatoren blir

$$Q(t) = V(t)C = V_0 C\left(1 - e^{-\sigma t}\right)$$

Dermed er strømmen inn på kondensatoren

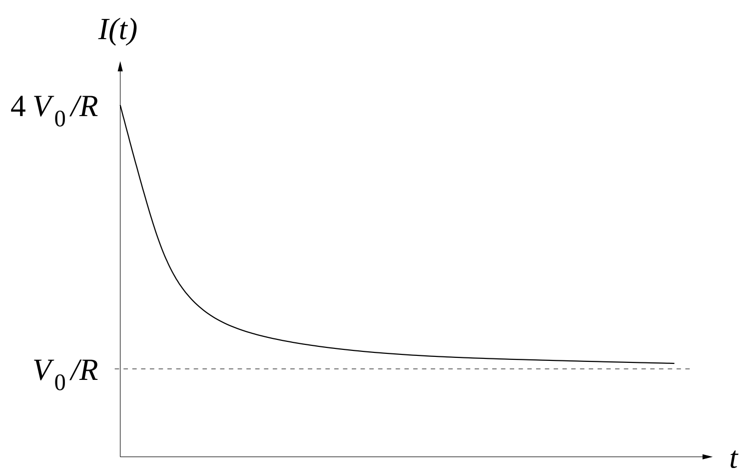
$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = \sigma V_0 C e^{-\sigma t}$$

Total strøm blir

$$I(t) = I_R(t) + I_C(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\sigma t}\right) + \sigma V_0 C e^{-\sigma t}$$

Med $\sigma = 4/RC$:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} + \frac{3V_0}{R} e^{-\sigma t}$$



OPPGAVE 2

a) Vi finner total ladning ved å integrere opp ladningen pr lengdeenhet:

$$\begin{aligned} Q &= \int dq \\ &= \int_{-L}^{L} \lambda(x)\, dx \\ &= \lambda_0 \int_{-L}^{L} \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \lambda_0 \Big|_{-L}^{L} \left(\frac{x^3}{3L^2} - \frac{x}{3} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Det er oppgitt at en ladning dq i posisjon x bidrar med $d\boldsymbol{p} = x\, dq\, \hat{x}$ til elektrisk dipolmoment. Hele stavens dipolmoment er dermed

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \int d\boldsymbol{p} \\ &= \hat{x} \int_{-L}^{L} x\, \lambda(x)\, dx \\ &= \lambda_0 \hat{x} \int_{-L}^{L} \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x}{3} \right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

siden integranden er antisymmetrisk omkring $x = 0$.

b) Potensialet fra en infinitesimal ladning dq er

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

i avstand r fra ladningen. Her skal vi bestemme potensialet i posisjon $x > L$ på x-aksen. Bidraget fra en liten ladning $dq = \lambda(x')\, dx'$ i posisjon x' blir da

$$dV = \frac{\lambda(x')\, dx'}{4\pi\varepsilon_0 (x - x')}$$

Totalt potensial i x finnes ved å summere opp bidragene fra alle slike ladningselementer på staven, dvs vi må integrere:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int dV \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \int_{-L}^{L} \frac{(x')^2\, dx'}{x - x'} - \frac{\lambda_0}{12\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \frac{dx'}{x - x'} \end{aligned}$$

Her kan vi benytte de oppgitte integralene, med $a \to x$ og $u \to x'$:

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \Big|_{-L}^{L} \left(-x^2 \ln|x-x'| - \frac{1}{2}(x')^2 - xx' \right) - \\
&\quad \frac{\lambda_0}{12\pi\varepsilon_0} \Big|_{-L}^{L} \left(-\ln|x-x'| \right) \\
&= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \left(x^2 \ln\frac{x+L}{x-L} - 2xL \right) - \\
&\quad \frac{\lambda_0}{12\pi\varepsilon_0} \ln\frac{x+L}{x-L} \\
&= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{3} \right) \ln\frac{x+L}{x-L} - \frac{2x}{L} \right]
\end{aligned}$$

Dette er på den oppgitte formen med $\beta = \lambda_0/4\pi\varepsilon_0$.

c) Vi bruker den oppgitte rekkeutviklingen for å finne et tilnærmet uttrykk for logaritmeleddet når $x \gg L$, dvs $\alpha = L/x \ll 1$:

$$\ln\frac{x+L}{x-L} = \ln\frac{1+L/x}{1-L/x} = \frac{2L}{x} + \frac{2L^3}{3x^3} + \frac{2L^5}{5x^5} + \ldots$$

Setter inn, ordner, og beholder første ledd som ikke blir null:

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{2x}{L} + \frac{2L}{3x} + \frac{2L^3}{5x^3} + \ldots - \frac{2L}{3x} - \frac{2L^3}{9x^3} - \frac{2L^5}{15x^5} - \ldots - \frac{2x}{L} \right] \\
&= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) \frac{L^3}{x^3} + \ldots \\
&= \frac{2\lambda_0 L^3}{45\pi\varepsilon_0 x^3} + \ldots
\end{aligned}$$

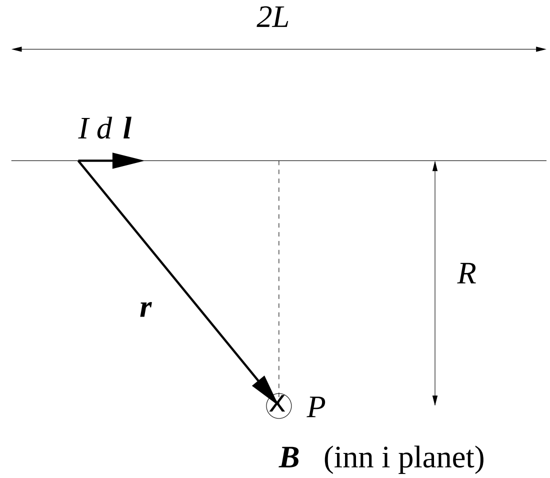
Dette er på den oppgitte formen med

$$\gamma = \frac{2\lambda_0 L^3}{45\pi\varepsilon_0}$$

(Evt. $\gamma = 8\beta L^3/45$.)
Kommentar: Det er rimelig at potensialet går mot null som $1/x^3$: Hvis staven hadde hatt netto ladning forskjellig fra null, måtte vi ha forventet at potensialet faller av som $1/x$ for store x. Men staven har ikke noe netto ladning, så vi må forvente at potensialet går raskere mot null enn dette. Hvis staven hadde hatt elektrisk dipolmoment forskjellig fra null, måtte vi ha forventet at potensialet faller av som $1/x^2$ for store x. (Se f.eks. eksamen mai 2005.) Men staven har heller ikke noe elektrisk dipolmoment, så vi må forvente at potensialet går enda raskere mot null!

OPPGAVE 3

a) Figur:



La oss f.eks. legge lederen langs x-aksen, med origo på midten. Av figuren finner vi da:

$$
\begin{aligned}
I\,dl &= I\,dx \\
r &= \left(x^2 + R^2\right)^{1/2} \\
|I\,d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}| &= I \cdot dx \cdot \left(x^2 + R^2\right)^{1/2} \cdot \frac{R}{r} = I \cdot dx \cdot R \\
r^{-3} &= \left(x^2 + R^2\right)^{-3/2}
\end{aligned}
$$

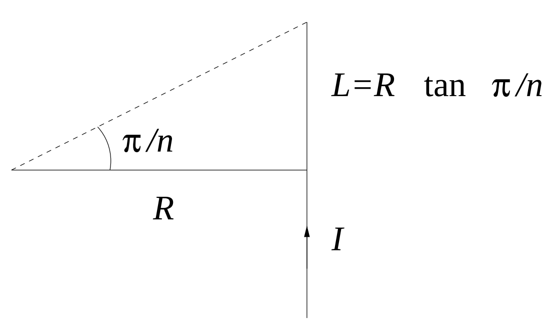
Dette setter vi inn i Biot–Savarts lov og finner

$$
B = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}
$$

Her er integralet på den oppgitte formen, med $a = 1$, $b = 0$ og $c = R^2$, slik at

$$
B = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \bigg|_{-L}^{L} \frac{x}{R^2\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi R\sqrt{L^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R\sqrt{1 + R^2/L^2}}
$$

b) I sentrum av en regulær n-kant må vi få et like stort bidrag til det totale magnetfeltet fra hver av de n rette lederbitene, og alle bidrag har retning ut av planet (når strømmen går mot klokka, som angitt i figuren i oppgaveteksten).



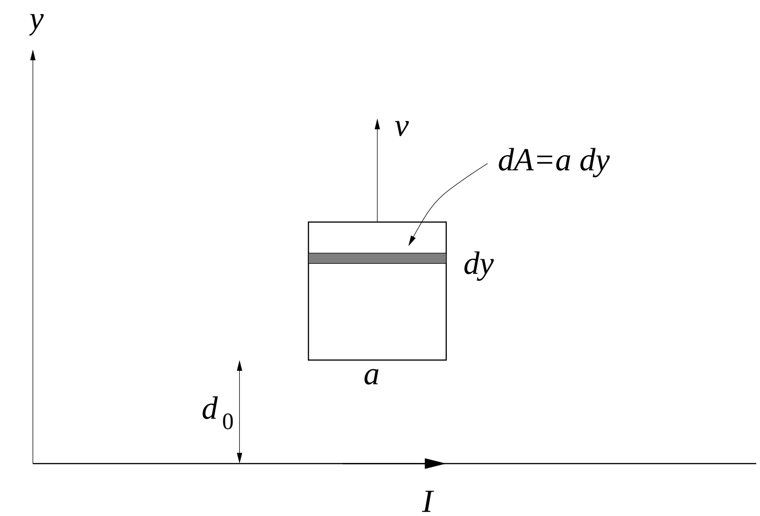
Vi ser av figuren over at $R/L = 1/\tan(\pi/n)$ slik at

$$\boldsymbol{B}_n = \frac{n\mu_0 I}{2\pi R\sqrt{1 + 1/\tan^2 \pi/n}}\,\hat{z}$$

Hvis n er stor, dvs $\pi/n \ll 1$, er $\tan(\pi/n) \simeq \pi/n$, og $\sqrt{1 + 1/\tan^2 \pi/n} \simeq \sqrt{1 + n^2/\pi^2} \simeq n/\pi$. Dermed:

$$B_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{n\mu_0 I}{2\pi R n/\pi} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

OPPGAVE 4



Magnetfeltet i avstand y fra den rette strømførende lederen er

$$B(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

med retning ut av planet der den kvadratisk sløyfa befinner seg. Avstanden mellom den rette lederen og sløyfa øker,

$$d(t) = d_0 + vt,$$

slik at omsluttet magnetisk fluks innenfor sløyfa blir tidsavhengig:

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \int_d^{d+a} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} \\
&= \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\cdot a \cdot dy \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\frac{d+a}{d} \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\frac{d_0 + a + vt}{d_0 + vt}
\end{aligned}$$

Indusert elektromotorisk spenning i sløyfa blir

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &= \frac{d\phi}{dt} \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\frac{d}{dt}\left[\ln(d_0 + a + vt) - \ln(d_0 + vt)\right] \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left[\frac{v}{d_0 + a + vt} - \frac{v}{d_0 + vt}\right]
\end{aligned}$$

Retningen avgjør vi ved hjelp av Lenz' lov: Når sløyfa trekkes oppover, reduseres omsluttet magnetisk fluks ut av planet. Indusert spenning må da resultere i en indusert strøm som gir magnetfelt og tilhørende magnetisk fluks ut av planet, for å motvirke den "påtrykte" reduksjonen. Retningen på indusert spenning og strøm må da være *mot klokka*.