NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
Fredag 11. august 2006 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 4 oppgaver, i alt 10 deloppgaver som alle telte like mye under bedømmelsen.
Løsningsforslaget er på 6 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

a) Av symmetrigrunner må det elektriske feltet peke i positiv y-retning for $y > 0$ og i negativ y-retning for $y < 0$. Videre kan feltstyrken E ikke avhenge av x eller z.
Dermed velger vi som gaussflate en "pilleeske" sentrert om xz-planet, med tykkelse $2y$ i y-retning, og med areal A normalt på y-retningen.
Vi får da elektrisk fluks $2 \cdot E(y) \cdot A$ ut gjennom gaussflaten. Netto ladning innenfor gaussflaten blir, for $|y| < h/2$:

$$q(y) = 2\rho_0 A y$$

og for $|y| > h/2$:

$$q(y) = \rho_0 A h$$

Den elektriske feltstyrken blir dermed, for $|y| < h/2$:

$$E(y) = \frac{\rho_0 y}{\varepsilon_0}$$

og for $|y| > h/2$:

$$E = \frac{\rho_0 h}{2\varepsilon_0}$$

b) Her kan vi bruke superposisjonsprinsippet, ettersom systemet med de to "kryssende" skivene tilsvarer en med uniform positiv og en med uniform negativ ladning.
I punktet (h, h) gir den positivt ladde skiva et bidrag

$$\frac{\rho_0 h}{2\varepsilon_0}\,\hat{y}$$

til det elektriske feltet, mens den negativt ladde skiva gir et bidrag

$$-\frac{\rho_0 h}{2\varepsilon_0}\,\hat{x}$$

Altså:

$$\boldsymbol{E}(h, h) = \frac{\rho_0 h}{2\varepsilon_0}\,(\hat{y} - \hat{x})$$

Potensialforskjellen V mellom $(h/2, 2h)$ og $(4h, h/2)$ finner vi ved å integrere det elektriske feltet langs en vilkårlig vei mellom de to punktene. Det enkleste er antagelig å velge en vei fra $(h/2, 2h)$ til $(h/2, h/2)$, og deretter fra $(h/2, h/2)$ til $(4h, h/2)$. Den første biten har lengde $3h/2$, går i negativ y-retning, og bidrar dermed med

$$\frac{\rho_0 h}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{3h}{2}$$

til V. Den andre biten har lengde $7h/2$, går i positiv x-retning, og bidrar dermed med

$$\frac{\rho_0 h}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{7h}{2}$$

til V. Dermed:

$$V = \frac{5\rho_0 h^2}{2\varepsilon_0}$$

OPPGAVE 2

a) I en tynn ring med radius r og tykkelse dr går det en strøm $dI = dq/T$, der $T = 2\pi/\omega$ er tiden skiva bruker på en omdreining (dvs perioden) og $dq = \sigma(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$ er ladningen på den tynne ringen. En slik tynn ring omslutter et areal πr^2, slik at dens magnetiske dipolmoment er

$$dm = dI \cdot \pi r^2 = \frac{\sigma(r) \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot \omega}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \sigma_0 \omega b^2 \pi r dr$$

Skivas totale magnetiske dipolmoment finner vi ved å integrere dette, fra $r = a$ til $r = b$:

$$m = \int dm = \int_a^b \sigma_0 \omega b^2 \pi r dr = \frac{1}{2} \sigma_0 \omega b^2 \pi (b^2 - a^2)$$

b) Vi kan bruke det oppgitte uttrykket til å skrive ned magnetfeltet dB fra en tynn ring med radius r, tykkelse dr og strøm $dI = dq/T = \sigma(r) \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot \omega/2\pi$:

$$dB = \frac{\mu_0 dI r^2}{2\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

Innsetting for dI og integrasjon over skiva gir

$$B(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma_0 b^2}{2} \int_a^b \frac{r dr}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

Dette er et enkelt integral, og vi får

$$\int_a^b \frac{r dr}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} = \left(z^2 + a^2\right)^{-1/2} - \left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}$$

Altså

$$B(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma_0 b^2}{2} \left[\left(z^2 + a^2\right)^{-1/2} - \left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}\right]$$

c) Langt unna skiva har vi både $z \gg b$ og $z \gg a$. Da har vi

$$\left(z^2 + b^2\right)^{-1/2} \simeq z^{-1} \left(1 - \frac{b^2}{2z^2}\right)$$

og tilsvarende om vi bytter ut b med a. Magnetfeltet blir da

$$B(z) \simeq \frac{\mu_0 \omega \sigma_0 b^2}{2z} \left(1 - \frac{a^2}{2z^2} - 1 + \frac{b^2}{2z^2}\right) = \frac{\mu_0 \omega \sigma_0 b^2 \left(b^2 - a^2\right)}{4z^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$$

OPPGAVE 3

a) Ettersom den roterende ringen er liten, kan vi med god tilnærmelse anta uniformt magnetfelt

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi d^3}$$

rettet langs positiv z-akse "der den roterende ringen er". Her har vi brukt uttrykket fra oppgave 2c.
Rotasjon omkring x-aksen med vinkelfrekvens ω medfører at magnetisk fluks gjennom den roterende ringen blir

$$\phi(t) = B \cdot A \cdot \cos\omega t = \frac{\mu_0 m}{2\pi d^3} \cdot \pi a^2 \cdot \cos\omega t$$

(eventuelt $\sin\omega t$). Indusert spenning i ringen blir dermed

$$V(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 m a^2 \omega}{2d^3} \sin\omega t$$

Dersom den lille ringen roterer omkring z-aksen, vil det til enhver tid passere null magnetisk fluks gjennom arealet omsluttet av ringen. Det blir da ingen indusert spenning i den roterende ringen. (Selv om vi tar hensyn til at magnetfeltet ikke er helt uniformt over den roterende ringen, vil vi pga symmetrien uansett ha en tidsuavhengig omsluttet magnetisk fluks, og dermed null indusert spenning.)

b) Indusert spenning i ringen resulterer i en elektrisk strøm dersom ringen er elektrisk ledende. En metallisk ring vil ikke være en perfekt leder, den vil ha en viss ohmsk motstand R som kan beregnes dersom vi kjenner metallets elektriske ledningsevne (konduktivitet) σ og dens tverrsnitt S: $R = 2\pi a/\sigma S$.
En tidsvarierende elektrisk strøm $I(t)$ i ringen vil gi et tidsvarierende bidrag til den magnetiske fluksen som omsluttes av ringen. Ringens selvinduktans L avgjør hvor stor den resulterende induserte motspenningen $(-L dI/dt)$ blir.
Spenningskilden $V(t)$ representerer den induserte spenningen bestemt i punkt *a*.
Vi har allerede antydet hvordan R kan bestemmes. Det er ikke fullt så enkelt å bestemme selvinduktansen L, men i prinsipp kan denne finnes ved hjelp av Biot–Savarts lov, som gir oss "oppskriften" på å beregne magnetfeltet $\boldsymbol{B}_I$ i en vilkårlig posisjon som følge av en elektrisk strøm I i ringen. Kjenner vi magnetfeltet i alle punkter på flaten som omsluttes av ringen, kan vi bestemme omsluttet magnetisk fluks,

$$\phi_{\text{ring}} = \int \boldsymbol{B}_I \cdot d\boldsymbol{A}$$

og deretter selvinduktansen

$$L = \frac{\phi_{\text{ring}}}{I}$$

OPPGAVE 4

a) Parallellkobling av n like store motstander R gir tilsammen en motstand R/n. Total motstand i kretsen er derfor

$$R + \frac{R}{2} + \frac{R}{3} = \frac{11R}{6}$$

slik at strømmen blir

$$I = \frac{6V_0}{11R}$$

ved bruk av Ohms lov. Med oppgitte tallverdier: $I \simeq 55$ mA.
Effekt, dvs energi pr tidsenhet, levert av spenningskilden:

$$P = V_0 I = \frac{6V_0^2}{11R} \simeq 0.55 \text{ W}$$

Energi levert av spenningskilden i løpet av 10 s:

$$U = Pt \simeq 5.5 \text{ J}$$

b) Tilkobling av spenningskilden ved $t = 0$ gir konstant strøm

$$I_1 = \frac{V_0}{R}$$

gjennom motstanden til venstre. Tilkobling av spenningskilden ved $t = 0$ til seriekoblingen av C og R har vi tatt i detalj på forelesning. Kondensatoren lades opp slik:

$$Q(t) = V_0 C \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

slik at strømmen i denne "grenen" av kretsen blir

$$I_2(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/RC}$$

Dermed blir total strøm levert av spenningskilden

$$I(t) = I_1 + I_2(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 + e^{-t/RC}\right)$$

Effekt levert av spenningskilden:

$$P(t) = V_0 I(t) = \frac{V_0^2}{R}\left(1 + e^{-t/RC}\right)$$

Energi levert av spenningskilden mellom $t = 0$ og $t = T$:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^T P(t)dt \\ &= \frac{V_0^2}{R} |_0^T \left(t - RCe^{-t/RC}\right) \\ &= \frac{V_0^2}{R}\left(T - RCe^{-T/RC} + RC\right) \end{aligned}$$

Med oppgitte tallverdier ($T = 10$ s):

$$U \simeq 11 \text{ J}$$

c) Strøm gjennom motstanden:

$$I_1 = \frac{V_0}{R}$$

Strøm gjennom induktansen bestemmes av

$$V_0 = L\frac{dI_2}{dt}$$

som gir

$$I_2(t) = \frac{V_0 t}{L}$$

ettersom det ikke gikk noen strøm før $t = 0$. Total strøm:

$$I(t) = I_1 + I_2(t) = \frac{V_0}{R} + \frac{V_0 t}{L}$$

Effekt levert av spenningskilden:

$$P(t) = V_0 I(t) = \frac{V_0^2}{R} + \frac{V_0^2 t}{L}$$

Energi levert av spenningskilden mellom $t = 0$ og $t = T$:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^T P(t)dt \\ &= \frac{V_0^2 T}{R} + \frac{V_0^2 T^2}{2L} \end{aligned}$$

Med oppgitte tallverdier ($T = 10$ s):

$$U \simeq 50 \text{ kJ}$$